BIBLIOTECA ALFONSINA
201
36 C
8

K. 5.

Digitized by Google

Digitized by Google

TRATTATO

TEORICO-PRATICO

D' ARITMETICA

COMPILATO

DA GIUSEPPE FRANCOIS

Volume Unico

BIBLIOTHECA
SS·VINC·ET ANASTASII
MIRIS INFIRM·DE URBE

BIBLIOTECA NAZ.
ROMA
VITTORIO EMANUELE

FIRENZE

DALLA TIPOGRAFIA DI LUIGI PEZZATI

1843

PREFAZIONE

Quando mi venne in pensiero di dare alla luce una nuova Aritmetica, la quale fosse completa e bene ordinata, affidandomi alla speranza che molti sarebbero stati gli Associati, promisi di aggiungere al Corso teorico tutto quello che poteva appartenere al Commercio. Ma poche essendo state le firme raccolte, mi sono limitato dare al Pubblico soltanto un'Aritmetica completa, che, oltre ai principj teorici, contiene tutte quelle applicazioni, che possono venire a bisogno in un lavoro di simil guisa. La terza parte dunque, che ora vede la luce, compie perfettamente l'opera, ed è cosa affatto staccata da quello che io dirò un giorno intorno al Commercio.

Possano le mie premure tornare utili alla mia patria, che io ne sarò contento.

Non tacerò il nome dell' egregio Sig. Abate Gaetano Balatri che non ha sdegnato essere un mio collaboratore.

G. François.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

Digitized by Google

TRATTATO TEORICO-PRATICO
DI ARITMETICA

PARTE PRIMA

NOZIONI PRELIMINARI

1. Quasi tutti gli esseri esistenti in natura presentano alla nostra mente un'idea di grandezza maggiore o minore secondo la specie in che sono compresi. Questa loro proprietà essendo stata presa particolarmente di mira; e l'uomo avendo voluto scoprire di *quanto* la grandezza di un essere fosse maggiore o minore di quella di un altro, ha fatto nascere un vocabolo affatto nuovo, qual'è appunto la parola *quantità*.

Per *quantità* o *grandezza* in generale intendesi tutto ciò che ha la proprietà di *crescere*, o di *diminuire*.

2. Le quantità si dividono in due classi distinte:

1.ª In *quantità* delle quali si possono indicare esattamente i gradi di accrescimento, e di decrescimento.

2.ª In *quantità* delle quali non si può assegnare l'aumento o il decrescimento, delle quali cioè non si può stabilire qual sia il doppio, il triplo ec., la metà, il terzo, e così di seguito.

Della prima classe sono il tempo, le lunghezze, i pesi, le misure ec., ec.

Della seconda poi tutte le quantità morali, ed in generale tutto ciò che dipende dalla volontà dell'uomo.

Nel presente trattato non ci occuperemo che delle prime, cioè delle quantità che possono misurarsi, e che dai sapienti sono appellate *quantità matematiche*.

3. Le quantità esser possono d' infinite specie, e tante appunto quante sono le cose diverse che hanno la proprietà di crescere o di diminuire. Se però in tutte queste quantità non si considera che la sola proprietà che ha dato loro il nome di quantità, e questa proprietà si separa, e si stacca dalle altre formandone un essere a parte, si viene a formare la così detta *quantità astratta*, che si può definire: *quella quantità nella quale si considera la sola proprietà di crescere e di scemare staccata da qualunque altra particolare.* Di qui si vede chiaramente come la quantità astratta non possa esistere da per se, e come non sia che un' astrazione della mente umana. Se poi la quantità si considera come unita alle altre proprietà che possono convenire agli oggetti in particolare, allora essa dicesi *quantità concreta*, che può definirsi: *una quantità particolare e determinata, rivestita delle qualità sensibili, che costituiscono la sua natura speciale.*

4. Le quantità si dividono anche in *omogenee* ed *eterogenee.* Si chiamano *omogenee* quando si considerano quantità della medesima specie, come *due uomini*, *tre uomini*, *ec.*; *eterogenee* quando si considerano delle quantità di specie diversa, come *alberi* e *cavalli.*

5. Qualunque quantità poi si manifesta sotto due forme differenti, o come un solo tutto senza alcuna distinzione di parti, o come una collezione di più cose simili, o di più parti staccate le une dalle altre. Il carattere proprio della prima specie di quantità è il legame che si ravvisa fra le sue parti, ossia la loro continuità; il carattere proprio della seconda specie è la disunione delle parti che in essa si ravvisano. La prima quantità dicesi *quantità continua*, e si definisce: *quella quantità che ha tutte le sue parti unite le une con le altre, in modo che non vi si scorge separazione veruna.* La seconda quantità poi si dice *quantità discreta*, e può definirsi: *quella quantità che ha le sue parti separate e staccate le une dalle altre.* Della quantità continua, che dicesi anco estensione, e delle sue proprietà, si occupa la Geometria: l' Aritmetica si occupa della quantità discreta.

6. Essendo la proprietà essenziale e caratteristica della quantità quella di aumentare e di diminuire indefinitamente, vale a dire di non avere una grandezza fissa e determinata,

per acquistarne un' idea precisa sarà necessario il cercare in ogni quantità, che ci si presenti, quanto essa sia grande. Per avere adunque una esatta idea della grandezza di una quantità non ci si presenta altro mezzo che quello di paragonare qualunque quantità ad una porzione di quantità della specie medesima.

Quasi tutti gli Aritmetici si sono sforzati di dare un' idea precisa di questa porzione di quantità, ossia di ciò che intendasi per *unità:* molti conoscinta la difficoltà dell'impresa han detto che era impossibile definirla esattamente, come pure io stesso opino: ma se potremo, almeno con esempi, far comprendere cosa essa sia nel nostro modo d'intendere, perchè non tentarlo?

Supponiamo che si voglia determinare quanto una strada sia lunga: è evidente che non potremo acquistare idea precisa della sua lunghezza se prima non prenderemo una parte della lunghezza in questione, della quale si abbia una cognizione esatta, che riportata sopra la lunghezza data, si veda quante volte vi è contenuta; con che avremo, in certa maniera, acquistata l'idea della lunghezza della strada.

Sia, per meglio spiegarmi, la porzione di lunghezza da noi presa ugnale al palmo della mano; e suppongasi che questo, nella lunghezza della strada in questione, sia contenuto sessantacinque volte: concluderò da questa osservazione che la lunghezza della strada è sessantacinque palmi, e un palmo è ciò che chiamasi *unità* di misura, e il sessantacinque ciò che chiamasi *numero.*

Altro esempio. Supponiamo di voler conoscere il peso di una palla di piombo, e si prenda per la porzione della palla, che deve servire di termine di paragone, un pallino ugualmente di piombo da munizione, e supponiamo che per fare equilibrio alla palla abbisognino cento quarantasei di questi pallini: in questo caso il pallino è l'*unità* di peso, ed il cento quarantasei il *numero.*

Da ciò risulta (siccome il ragionamento fatto sopra i due antecedenti esempi è generale, e può applicarsi a qualunqne siasi caso) che

L'*unità* è una porzione di quantità presa ad arbitrio, o dalla natura, e, come vedremo in seguito, convenuta dalla ge-

neralità, per mezzo della quale si misurano, o si paragonano le quantità della medesima specie: che vi saranno tante unità distinte, quante saranno le diverse maniere di paragonare le quantità, vale a dire *unità di lunghezza*, *di peso*, *di capacità*, ec. ec.

7. Il *numero* poi non è che il rapporto esistente coll'unità di una data specie: infatti quando della lunghezza della strada (n.° 6) ne ho presa una porzione uguale al palmo della mano, e quindi ho trovato che nella lunghezza totale era contenuta sessantacinque volte, ho veduto chiaramente che il sessantacinque, che ho chiamato numero, non era che il rapporto che passa fra esso e il palmo della mano: da ciò legittimamente si deduce, che tutti i numeri si potranno formare con l'aggiunta reiterata dell'unità: così un'unità più un'unità formeranno due unità, cioè il numero due; due unità più un'unità saranno tre unità, ossia il numero tre, e così di seguito.

8. Ma se tutti i numeri possibili ed immaginabili si formano per mezzo della reiterata aggiunta dell'unità, ne segue che sono illimitati, e che per quanto un numero sia grande si può sempre accrescere coll'aggiunta di un'unità; dunque possiamo concludere che i numeri sono infiniti.

Ma se i numeri sono infiniti è evidente che la prima cura degli uomini dev'essere stata quella di trovare il mezzo di ordinarli e classarli. Da ciò ne è derivato quello che chiamasi sistema di numerazione.

9. Il sistema di numerazione dividesi in due parti: in *numerazione parlata*, ed in *numerazione scritta*.

La *numerazione parlata* consiste nell'esprimere tutti i numeri col minor numero di parole possibili combinate fra loro convenientemente.

La *numerazione scritta* consiste nello scrivere tutti i numeri possibili con un numero limitato di cifre, o caratteri.

Nel presente trattato non ci tratterremo sulla numerazione parlata, facendo questa parte delle prime nozioni che ci vengon date nell'infanzia, ed invece passeremo ad esporre con la maggior brevità possibile il sistema di numerazione scritta, che è attualmente in uso.

10. Le *cifre* o *caratteri* che rappresentano i primi nove

numeri sono

1	2	3	4	5	6	7	8	9
uno,	due,	tre,	quattro,	cinque,	sei,	sette,	otto,	nove,

e queste si chiamano *unità semplici*, o *del prim' ordine*.

Sarebbe stato cosa facile inventare altre cifre per andar più oltre: ma l'ingegno umano dovette convincersi che, moltiplicando i caratteri, e indicando ciascun numero con una nuova cifra, ne sarebbe nata una complicazione tanto grande da sbigottire l'animo di chiunque. Conosciuta questa verità, non restava che trovare un mezzo per far rappresentare alle cifre di sopra notate tutti i numeri possibili ed immaginabili. A tale effetto si stabilì di dare a questi nove caratteri, oltre il valore assoluto, un valore relativo, o di posizione. Questa idea, che si deve agli Arabi e forse ai più antichi popoli dell'Indio, è certamente una delle più belle, e ingegnose scoperte dello spirito umano. Fu adunque fissata la seguente legge di convenzione, *che ogniqualvolta una delle cifre stabilite si avanzava di un posto dalla destra alla sinistra acquistava un valore dieci volte maggiore di quello che aveva quando occupava il posto alla destra*, o viceversa: così il carattere 1, che rappresenta l'unità, avanzato di un posto verso la sinistra fu impiegato a rappresentare una collezione di dieci unità semplici, che si chiama *diecina*, o *unità del second' ordine*. Il carattere 2, che rappresenta due unità, fu adoperato in simil guisa per esprimere due diecine, o la collezione di venti unità semplici, e così di seguito.

Bisognava però fissare un segno parimente di convenzione che posto accanto alle cifre 1, 2, 3, 4, ec. facesse loro acquistare un valore dieci volte più grande, ossia le facesse avanzare di un posto dalla destra alla sinistra, senza che questo segno fosse una delle cifre già conosciute. Fu immaginato a tale uopo un nuovo carattere il quale per se stesso non ha verun valore, ma che però è adattatissimo a determinare la posizione degli altri. Questo carattere si chiama *zero*, e si scrive 0.

Per esprimere i numeri undici, dodici, tredici, quattordici ec. fino a diciannove, fu necessario scrivere alla destra dell'unità invece del carattere 0, le cifre 1, 2, 3, fino

a 9; che diede

11..... undici,
12..... dodici,
13..... tredici,
.....,
19..... diciannove.

È bene osservare che i primi sei numeri dopo il dieci fanno eccezione alla regola generale nell'esprimerli, poichè invece di dire *dieci uno*, *dieci due*, ec..... *dieci sei*, si dice *undici*, *dodici*, *tredici*, *quattordici*, *quindici*, *sedici*, espressioni oramai sanzionate dall' uso.

Arrivati a 19, l'aggiunta di una nuova unità forma una collezione di vent' unità, o due diecine che si scrivono 20; e sostituendo quindi successivamente nel posto del carattere 0 i numeri 1, 2, 3, ec. con facilità si formarono

21..... ventuno,
22..... ventidue,
23..... ventitre,
.....,
29..... ventinove.

Dopo di che l'addizione di un'unità produsse una collezione di trenta unità, o di tre diecine, che si rappresenta col numero 30.

Si giunse con questo metodo a contare fino a nove diecine, alle quali aggiunti i primi nove numeri si contò fino a 99. L'addizione di una nuova unità produsse una collezione di dieci diecine, e la legge stabilita di sopra fece conoscere che siccome per rappresentare una diecina era stato sufficiente l'avanzare la cifra 1 di un posto dalla destra alla sinistra, così tirandola indietro due posti si sarebbe potuto farle esprimere una specie di unità la quale sarebbe uguale a dieci decine, che si chiama *cento*, *o un'unità del terz'ordine*, che si scrive con due zeri alla destra, cioè 100.

Seguendo lo stesso ordine, e cangiando cifre avremo

200..... duecento,
300..... trecento,
400..... quattrocento,
.....,
900..... novecento.

Ponendo fra 100 e 200, fra 200 e 300 ec. i novantanove numeri, che già conosciamo, verremo a formare tutti i numeri fino a 999. Così centuno si scrive 101: centundici si scrive 111. In questo numero vedesi la stessa cifra ripetuta tre volte con valori differenti: nel primo posto a destra esprime un' unità: nel secondo una diecina: nel terzo un centinaio. Lo stesso dicasi degli altri numeri, come 555, 666 ec.

L'unità del quart'ordine, che si forma di dieci unità del terz'ordine, chiamasi *mille*, e si scrive 1000; come pure una diecina di migliaia, o diecimila, si scrive 10000; un centinaio di migliaia, o centomila si scrive 100000.

Le collezioni di dieci centinaia di migliaia, ovvero di mille volte mille, portano il nome di *milioni*, e si formano tutti i numeri superiori al milione con lo stesso modo col quale si sono formati dall'uno al mille, e dal mille al milione, vale a dire si hanno successivamente *unità di milioni, diecine di milioni, e centinaia di milioni:* dopo di che la collezione di dieci centinaia di milioni forma il *bilione;* quindi con lo stesso metodo, e con l'istesso ordine si formano i *trilioni*, i *quadrilioni*, e i *quintilioni* ec.

Seguendo lo stesso metodo, e riflettendo che qualunque numero si compone di unità semplici, di diecine, di centinaia ec.; che la collezione delle unità di ciascun ordine è, tutto al più, uguale a nove; che, nel caso in cui il numero sia privo di alcuni ordini di unità, abbiamo un carattere per tenerne il posto; mi sembra si debba rimaner convinti che possiamo esprimere tutti i numeri immaginabili con l'aiuto di dieci cifre, sempre che si ponga, come fondamento di questo sistema di numerazione la legge stabilita di sopra, *che ciascuna cifra esprime unità di dieci in dieci volte maggiori ogniqualvolta si avanzi di un posto dalla destra alla sinistra.*

11. Passiamo ora a far conoscere come si possa enunciare un numero composto di quante si vogliano cifre.

Prendiamo per esempio il numero 316729.

Questo numero è composto di sei cifre: la prima a destra esprime le unità; la seconda rappresenta le diecine; la terza le centinaia; la quarta le unità di migliaia; la quinta

le diecine di migliaia; la sesta le centinaia di migliaia; ond'è che il dato numero è uguale all'espressione trecentomila, più diecimila, più seimila, più settecento, più venti, più nove; o più brevemente: *trecentosedicimila settecento ventinove*. Basterà tener dietro al seguente esempio perchè sparisca ogni difficoltà per enunciare qualunque siasi numero

7	diecine di quadrilioni
3,	unità di quadrilioni
4	centinaia di trilioni
6	diecine di trilioni
8,	unità di trilioni
5	centinaia di bilioni
7	diecine di bilioni
0,	unità di bilioni
6	centinaia di milioni
3	diecine di milioni
2,	unità di milioni
8	centinaia di migliaia
0	diecine di migliaia
6,	unità di migliaia
2	centinaia
4	diecine
8	unità

Le cifre di questo numero son divise per mezzo di virgole in membri di tre in tre cifre cominciando dalla destra, escluso l'ultimo membro che nell'esempio attuale non ha che due sole cifre, e che in altri casi potrebbe averne ancora una. Si tiene un tal sistema per leggere con maggior facilità il numero, ed il motivo che ci siamo limitati a dividerlo in membri di tre in tre cifre risulta dall'esposta nomenclatura, che ogni numero scritto in cifre si divide in centinaia, diecine e unità semplici; in centinaia, diecine e unità di migliaia; in centinaia, diecine e unità di milioni ec.; vale a dire in *gruppi* di unità semplici, di migliaia, di milioni, di bilioni ec., ciascuno dei quali si esprime con tre cifre, escluso l'ultimo gruppo che può essere di due, ed ancora di una sola cifra.

Da ciò risulta che per enunciare un numero bisogna dividerlo in membri di tre in tre cifre cominciando dalla destra: enunciare ciascuno di questi membri come se fosse solo, e aver cura di dare a ciascun membro il nome che gli conviene. Stabilito ciò si vedrà facilmente che il dato numero equivale a *settantatre quadrilioni, quattrocento sessantotto trilioni, cinquecento settanta bilioni, seicento trentadue milioni, ottocento seimila, duecento quarantotto.*

12. Si scrive un numero qualunque collocando successi-

vamente le cifre, che esprimono le unità dell'ordine più elevato, le une accanto alle altre cominciando però da sinistra, e avendo attenzione di riempire con zeri le collezioni delle unità che potrebbero mancare. Con questo metodo si scrive qualunque numero. Eccone un esempio. *Cinque trilioni, trecentodue bilioni, quattrocento milioni, trecento settantaseimila, settecento due;* che equivale in numeri a 5,302,400,376,702 numero scritto secondo le regole date, e secondo il quale debbonsi tutti scrivere.

13. Conviene osservare che in Italia e in Germania i numeri si enunciano con una piccola differenza dal sistema che abbiamo esposto. Infatti dopo avere stabilita per le prime sei cifre a destra la stessa regola che abbiamo fissata nel nostro sistema, dividono gl' Italiani le cifre di un numero qualunque in classi di sei cifre invece di tre, ed enunciano ciascuna classe come se fosse un numero isolato, colla stessa regola colla quale enunciano le prime sei cifre. I nomi dati alle classi sono i seguenti; per la prima classe *unità;* per la seconda *milioni;* per la terza *bilioni* ec. Ma ognuno vede che questi nomi non corrispondono perfettamente al significato che abbiamo dato di sopra ai medesimi.

Per render più chiaro il metodo di sopra citato proponiamo il seguente esempio.

quattro mila	4,	unità di migliaia di bilioni		
	0	centinaia	di bilioni	
settanta	7	diecine		
cinque	5	unità		
		bilioni,		
seicento	6	centinaia	di migliaia di milioni	
	0	diecine		
	0	unità		
		mila,		
duecento	2	centinaia	di milioni	
novanta	9	diecine		
cinque	5	unità		
		milioni,		
trecento	3	centinaia	di migliaia di unità	
ottanta	8	diecine		
due	2	unità		
		mila,		
quattrocento	4	centinaia	di unità semplici	
venti	2	diecine		
sei	6	unità		

numero che secondo il nostro sistema si leggerebbe

quattro	4	unità di quadrilioni		
		quadrilioni,		
	0	centinaia	di trilioni	
settanta	7	diecine		
cinque	5	unità		
		trilioni,		
seicento	6	centinaia	di bilioni	
	0	diecine		
	0	unità		
		bilioni,		
duecento	2	centinaia	di milioni	
novanta	9	diecine		
cinque	5	unità		
		milioni,		
trecento	3	centinaia	di migliaia	
ottanta	8	diecine		
due	2	unità		
		mila,		
quattrocento	4	centinaia	di unità	
venti	2	diecine		
sei	6	unità		

14. Siccome il sistema di numerazione da noi esposto si fonda totalmente sulla progressione dei valori relativi delle cifre, che divengono di dieci in dieci volte maggiori, vale a dire

si fonda sull'invenzione delle unità collettive, che comprendono respettivamente dieci unità inferiori, così è derivato al sistema il nome di *decimale:* il numero poi che indica quante unità inferiori son contenute nelle unità immediatamente superiori, dicesi *base* del sistema; laonde il 10 è la base del sistema decimale.

15. Varii altri sistemi di numerazione si sarebbero potuti immaginare, i quali certamente avrebbero recato maggiori vantaggi del decimale; ma il cambiamento totale di nomenclatura, che di necessità ne sarebbe derivato, e moltissimi altri inconvenienti, non permetteranno giammai che si elimini questo sistema. Non ostante molti autori si sono occupati in dimostrare le proprietà di altri sistemi di numerazione.

16. Nel por fine al sistema di numerazione non ci possiamo astenere dal far plauso all'ingegno dell'uomo, che ha saputo con tanta semplicità stabilire un metodo per rappresentare tutti i numeri, col dare alle cifre de' valori di posizione indipendenti affatto dal primitivo loro valore. Non sappiamo però comprendere come i Greci ed i Romani non lo abbiano adottato. E quantunque i sistemi di queste due nazioni non siano oramai più in uso perchè di poco vantaggio e immensamente complicati; nulladimeno gli esporremo a titolo di mera e semplice erudizione.

Ecco come i Romani scrivevano i numeri e le cifre che gli rappresentavano.

I.... uno	V.... cinque	C..... cento
II.... due	X.... dieci	D o IↃ.... cinquecento
III... tre	L.... cinquanta	M o CIↃ.. mille

Ogni volta che collocavano una lettera di minor valore a sinistra di una lettera di maggior valore, volevan significare che quella doveva sottrarsi, e il residuo era il numero che volevano accennare: così

IV.. quattro, IX.. nove, XL.. quaranta, XC.. novanta, ec.

Al contrario ogniqualvolta collocavano una lettera di minor valore a destra di un'altra di maggior valore, l'un valore doveva aggiungersi all'altro, e la somma era il numero

che volevano enunciare: così

VI.... sci, XI.... undici, LX.... sessanta
CX... centodieci, CL.... centocinquanta, ec.

Cangiavano le unità in migliaia ponendo una lineetta sopra le cifre: così $\bar{X}$ significava 10000, numero che si scriveva pure così CCIↃↃ. $\bar{C}$, oppure CCCIↃↃ, significava il numero 100000. $\overline{MM}$ indicava 2000000.

17. Il sistema dei Greci non era men complicato di quello dei Romani. Le unità, le diecine e le centinaia erano rappresentate dalle lettere consecutive dell' alfabeto.

α vale 1	ι vale 10	ρ vale 100
β.....2	κ.....20	σ.....200
γ.....3	λ.....30	τ.....300
δ.....4	μ.....40	υ.....400
ε.....5	ν.....50	φ.....500
ς.....6	ξ.....60	χ.....600
ζ, ϛ...7	ο.....70	ψ.....700
η.....8	π.....80	ω.....800
θ, ϑ...9	ϙ.....90	ϡ.....900

Indicavano poi le migliaia con un apice ′. Per dare un esempio di queste cifre citeremo i seguenti numeri. αβρδμ significava 1, più 2, più 100, più 1, più 40, cioè 144. Medesimamente α′χζ uguale 1607. β′φκθ uguale 2529.

18. Ritornando al nostro sistema, come si stabilì esser le quantità di due specie, così i numeri a queste due si posson ridurre, cioè numeri *astratti* e *concreti*. Diconsi *numeri astratti* quelli che non hanno alcuna parola dopo di se che gli qualifichi, come 20, 30, 100.

Numeri concreti diconsi quelli che hanno dopo di se un nome che gli qualifica, come 10 cavalli, 20 uomini.

CAPITOLO I.

19. L'*Aritmetica*, parola che nasce da due vocaboli greci ἀριθμος *(numero)*, e τέχνη *(arte)*, ha per oggetto speciale stabilire delle regole fisse e certe per effettuare tutte le operazioni possibili sopra i numeri.

Dai principii stabiliti ricavammo essere i numeri soggetti ad aumentare e diminuire, ed essendo così, è evidente che potranno assoggettarsi a due operazioni diverse. La prima, che serve ad aumentarli, dicesi addizione; la seconda, che serve a diminuirli, dicesi sottrazione. Tutte le altre operazioni, sotto qualunque aspetto si considerino, quantunque sembrino differenti, in effetto non sono che somma e sottrazione.

DELL' ADDIZIONE

20. I bisogni dell'uomo collocato in società lo conducono giornalmente a risolvere delle questioni, nelle quali è necessario combinare insieme due o più numeri della stessa natura, o di natura differente. Queste combinazioni costituiscono appunto le operazioni dell'Aritmetica, o il *calcolo numerico.* Vediamone alcuni esempii. Una persona, che si era maritata all'età di 19 anni, ebbe 6 anni dopo il matrimonio un figlio che morì di 46 anni, e al quale essa sopravvisse 10 anni. In quale età morì questa persona?

Secondo esempio. Gli allievi di un Instituto son distribuiti in cinque classi: nella prima ve ne sono 40; nella seconda e nella quinta 17; nella terza 25, e nella quarta 27. Si domanda quanti erano tutti gli alunni dell'Instituto? Cosa si cerca in ciascuno di questi problemi se non che di riunire insieme più numeri e formarne un solo che contenga tante unità quante ne contiene ciascuno in particolare? È dunque necessario trovare un metodo che ci conduca a conoscere qual sia questo numero che comprenda tutte le unità contenute nei numeri separati. Questa operazione è stata chiamata *somma o addizione* che si può definire: *un operazione aritmetica per mezzo della quale si forma un numero che contiene tante unità, quante se ne trovano in varii altri numeri.*

21. Per indicare che dobbiamo fare un'addizione, si usa scrivere la parola *più* tra i numeri che si debbono unire: per es. l'espressioni *tre più quattro, o sei più otto* indicano che questi numeri debbono unirsi insieme; e poichè nel fare le operazioni si debbono scrivere i numeri in cifre, così invece di *più* si scrive questo segno + avanti a ciascun numero da aggiungersi, il quale significa lo stesso, e dee leggersi

più, e chiamasi *segno positivo*. Così 3 + 2 + 4 significa che al 3 bisogna aggiungere il 2, e al risultamento bisogna aggiunger 4. Il risultamento finale, ossia quel numero che in se contiene tutte le unità comprese in varii altri numeri, dicesi *somma* o *totale*.

È importante molto osservare che l'espressioni 2 + 4, 7 + 5 + 6, ed ogni altra simile, non rappresentano un addizione fatta, ma un' addizione accennata, e da farsi.

22. L'addizione si potrebbe eseguire *numerando*, cioè aggiungendo ad un numero tante unità quante sono in un altro, o in quelli che si debbono con lui sommare: per esempio se si avesse da eseguire la somma di 3 + 5 si potrebbe togliere un'unità al 5 e aggiungerla al 3, e si avrebbe 4 + 4: togliendo adesso un'altra unità al 4, e aggiugnendola al primo 4, si avrebbe 5 + 3, e, così seguitando, si otterrebbe 6 + 2, 7 + 1, 8, e si vedrebbe che 8 è la somma di 3 + 5. Ma quantunque semplice sia l'operare in tal guisa, qual lunghezza ed imbarazzo s'incontrerebbe in questa ricerca quando i numeri fossero molti o grandi, cioè composti di molte unità? Però nacque la necessità di trovare un altro metodo più breve per effettuare l'addizione. Intanto avvertiremo esser necessario che i giovani fin d'ora sappiano a memoria le somme dei numeri di una sola cifra.

23. Ciò posto, per stabilire qual sia il metodo più breve per effettuare l'addizione, osserviamo cosa ella sia per se stessa. Noi abbiamo veduto che essa consiste nel trovare un numero che contenga in sè tutte le unità di molti altri numeri; decomponiamo dunque i numeri nelle loro diverse unità, e uniamo insieme tutte le unità di uno stesso ordine: per esempio nel sommare 63 con 24 osservo che il 1.° numero è 60 + 3 ed il secondo 20 + 4, ossia il 1.° rappresenta 6 diecine e tre unità, e il secondo 2 diecine e quattro unità: unisco le unità del prim'ordine ed ho 3 + 4 = 7 unità del prim'ordine, (il segno = indica *uguale*) quindi unisco le unità del second'ordine ed ho 6 + 2 = 8 diecine, o unità del second'ordine: avendo così ottenuto 8 unità di second'ordine e 7 di primo ordine, avrò il numero totale 87.

Si è veduto in questo esempio che si sono aggiunte insieme le unità di uno stesso ordine, cioè le unità di 2.° or-

dine colle unità di 2.° ordine, e le unità di 1.° ordine colle unità di 1.° ordine; la ragione perchè dovea farsi così è evidente, perchè quantità di una data specie non possono aggiungersi mai con quantità di specie diversa; è dunque essenziale che le quantità da aggiungersi sieno omogenee.

Sia pure da eseguirsi l'addizione indicata da $42 + 13 + 31$. Poichè 42 rappresenta 4 diecine più 2 unità; 13 rappresenta 1 diecina più tre unità, e 31 rappresenta 3 diecine più 1 unità; la somma cercata sarà $4 + 1 + 3$ diecine, $2 + 3 + 1$ unità, ossia 8 diecine e 6 unità, cioè 86.

24. Potrebbe darsi il caso che, essendo i numeri da sommarsi alquanto grandi, alcuna delle somme parziali delle unità di qualche ordine fosse composta di due cifre, ossia superasse il 9: per esempio $687 + 589 + 345$: se si sommano le unità di prim'ordine si ottiene $7 + 9 + 5 = 21$: come scriveremo adesso la somma 21? Osservo che 21 è composto di 2 unità di second'ordine e di un'unità di primo ordine; dunque le due unità di second'ordine le potrò unire alle altre unità di 2.° ordine, che si troveranno nei numeri da sommarsi, e così avrò $2 + 8 + 8 + 4 = 22$ unità di secondo ordine. In questa addizione parziale osservo che ho due unità di secondo ordine e 2 di terzo ordine; dunque porrò le due unità di secondo ordine nel secondo ordine, e le 2 unità di terzo ordine le aggiungerò alle altre unità di terzo ordine, che si troveranno nei numeri da sommarsi, ed avremo $2 + 6 + 5 + 3 = 16$ unità di terzo ordine, delle quali 6 ne scrivo nel terzo ordine, e delle altre dieci ne formo un'unità di quarto ordine, che scrivo nel quarto ordine. In simil modo si ragionerà in qualunque altro esempio.

25. La decomposizione dei numeri nelle loro unità diverse è la prima operazione necessaria per avere le somme parziali delle unità, delle diecine, ec. Ma in ogni numero scritto in cifre le unità sono sempre rappresentate dalla prima cifra a destra, le diecine dalla seconda, le centinaia dalla terza cifra successiva ec.; quindi se nella pratica tutti i numeri da sommarsi si scrivono l'uno al di sotto dell'altro in modo che tutte le cifre, che rappresentano un medesimo ordine di unità, si trovino collocate in una medesima linea o colonna, potremo per questa sola disposizione de'numeri considerarli come

decomposti nelle loro unità diverse, e potremo averne subito le somme parziali sommando separatamente tutte le cifre di una medesima colonna.

Disponendo in tal guisa le cifre, ed operando con i metodi esposti, con facilità troveremo la somma dei numeri appresso.

1.°	63876	2.°	5234
	5563		24769
	268		97
	56738		684
	3287		1226
	129732		32010

26. Dal fin qui detto possiamo ricavare la seguente regola generale per la pratica dell'addizione. *Si scrivono i numeri da sommarsi gli uni sotto gli altri ponendo le loro unità di uno stesso ordine in una medesima colonna verticale; si tira una linea sotto l'ultimo numero per separarlo dal risultamento: si sommano successivamente cominciando dalla destra i numeri contenuti in ciascuna colonna: se la somma non supera 9, essa si scrive tale, come l'abbiamo trovata, e se contiene delle diecine, queste si ritengono per unirle alla colonna seguente, e si scrivono le unità: finalmente all'ultima colonna si scrive la somma tale quale si sarà trovata.* Il numero che si troverà allora scritto sotto la linea di separazione sarà la somma richiesta, poichè risulterà dalla riunione delle unità, dieci e, centinaia, ec. dei numeri proposti.

27. Si è veduto che l'addizione si comincia da destra; ma non potrebbe essa cominciarsi da sinistra? Se la somma delle cifre contenute in ogni colonna non oltrepassasse mai il 9, sarebbe indifferente cominciare l'addizione da destra, oppure da sinistra; ma siccome accade, il più delle volte, che questo somme oltrepassino il 9, cominciando da sinistra saremmo sovente obbligati a tornare indietro per rettificare una cifra già scritta, e aumentarla di tante unità quante fossero le ottenute nella colonna seguente. Per evitare questo inconveniente, e non per natura intrinseca dell'addizione, si comincia da destra.

28. Allorchè si deve fare l'addizione di più numeri uguali,

come 63 + 63 + 63 + 63 + 63, si può tenere lo stesso metodo adoprato di sopra. Ma potendo i numeri uguali da sommarsi esser molti, è stato trovato un metodo molto compendioso per mezzo del quale con brevità si eseguisce l'addizione di più numeri uguali, e questo metodo, che è solo un' addizione compendiosa, dicesi moltiplicazione.

DELLA MOLTIPLICAZIONE

29. Coll' addizione, come abbiamo veduto, possono riunirsi insieme più numeri con somma facilità e prontezza. Ma quando si abbiano molti numeri da sommare, l'addizione riesce lunga e penosa. Utile è perciò di vedere se può semplicizzarsi, se non in generale, almeno in qualche caso particolare.

I numeri da sommarsi possono essere tutti uguali tra loro, o tutti disuguali, o alcuni uguali, e gli altri disuguali.

Se saranno tutti uguali, ciascuno di essi comprenderà lo stesso numero di unità, lo stesso numero di diecine, di centinaia, ec., e l'aggiungerli insieme è lo stesso che replicar più volte lo stesso numero di unità, lo stesso numero di diecine, centinaia, ec.: laonde per questo caso dobbiamo essere indotti a credere che vi sia un metodo per abbreviare l'addizione, e questo metodo esiste realmente.

Se saranno poi tutti disuguali, o alcuni soli uguali, allora ciascuno di essi non comprendendo lo stesso numero di unità, di diecine, ec., l'aggiungerli insieme non è lo stesso che replicare lo stesso numero d'unità, di diecine, ec., e difficilmente perciò potremo farne l'addizione con un metodo più semplice di quello esposto.

Ciò premesso, quando i numeri da sommarsi sono tutti uguali, l'addizione prende il nome di *moltiplicazione*. Di qui si vede che la moltiplicazione è un' addizione compendiosa, e può definirsi: *una operazione aritmetica per mezzo della quale si ripete un numero tante volte, quante unità sono contenute in un altro numero.*

30. Si chiama *moltiplicando* il numero che dee essere ripetuto più volte, e *moltiplicatore* quel numero, le cui unità indicano quante volte deve esser ripetuto il moltiplicando. Il

moltiplicando ed il moltiplicatore chiamansi entrambi col nome comune di *fattori*. La somma poi, che si ottiene dal ripetere più volte il moltiplicando, dicesi *prodotto*.

31. Come per indicare l'addizione introducemmo (n.° 21) il segno +, così, per indicare la moltiplicazione, introdurremo il segno $\times$, che significa *moltiplicato per*, che dee esser posto tra il moltiplicando ed il moltiplicatore in modo, che il moltiplicando sia scritto a sinistra, ed il moltiplicatore a destra. Per esempio. Sia 5 il moltiplicando, e 4 il moltiplicatore: s'indicherà la moltiplicazione scrivendo 5×4, e si leggerà 5 *da moltiplicarsi per* 4.

La moltiplicazione s'indica pure col porre un punto tra i due fattori di modo, che $5 . 4$ indica lo stesso che 5×4.

32. Poichè abbiamo veduto che la moltiplicazione consiste nel ripetere un numero tante volte, quante sono le unità contenute in un altro, è evidente che il prodotto deve contenere il numero ripetuto, ossia il moltiplicando, tante volte quante unità contiene il moltiplicatore: ma il prodotto essendo il numero che si cerca, ne nasce che l'oggetto della moltiplicazione è quello di trovare un numero che ne contenga un altro tante volte, quante unità sono comprese in un terzo numero. La moltiplicazione perciò si potrà definire: *un' operazione aritmetica per mezzo della quale si trova un numero, che ne contiene un altro tante volte, quante unità si trovano in un terzo numero; ossia si trova un numero che è composto con un altro, come un terzo numero è composto dell' unità.*

33. Per procedere con regola nella ricerca del metodo che si deve adoprare per moltiplicare un numero per un altro, si distingueranno quattro casi; cioè.

1.° Quando il moltiplicando ed il moltiplicatore sono di una sola cifra.

2.° Allorchè il moltiplicando è di più cifre, ed il moltiplicatore di una sola cifra.

3.° Quando il moltiplicando è di una cifra, ed il moltiplicatore di più cifre; e finalmente

4.° Quando il moltiplicando ed il moltiplicatore sono di più cifre.

34. Consideriamo il 1.° caso, cioè quello in cui i due fat-

tori sieno composti ciascuno di una sola cifra. Il metodo più facile, che si presenta al pensiero per ottenere il prodotto, è quello di ripetere il moltiplicando tante volte, quante unità sono nel moltiplicatore, e farne la somma: così per moltiplicare 7 per 5 si dice: 7 e 7 fanno 14, e 7 fanno 21, e 7 fanno 28, e 7 fanno 35. Questo ultimo numero essendo il risultamento dell'addizione di 5 numeri uguali a 7, esprime il prodotto di 7 per 5.

Ma poichè, come vedremo, gli altri casi della moltiplicazione si ridurranno a moltiplicare numeri di una cifra per numeri di una cifra, sarà bene che i principianti ne sappiano a memoria i prodotti. A tale effetto aggiungo qui la seguente tavola, che comprende tutti i prodotti risultanti da moltiplicare una sola cifra per una sola cifra, e che si dice *Tavola di Pitagora*, perchè ad esso se ne attribuisce l'invenzione.

TAVOLA DI PITAGORA

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Il metodo per formare questa tavola è semplicissimo. Si scrivono in una prima linea orizzontale tutti i numeri da 1 a 9; quindi in una seconda linea orizzontale posta immedia-

tamente sotto alla precedente, si scrivono i prodotti delle cifre della prima linea per 2, il che si ottiene col ripetere due volte ciascun numero della prima linea e scriverne la somma. Nella terza linea si pongono i prodotti dei numeri della prima linea per 3, i quali si ottengono col sommare i numeri della prima linea coi numeri della seconda. La quarta si ottiene col sommare la terza colla prima; la quinta col sommare la quarta colla prima, ec. fino alla nona linea orizzontale.

Per trovare in questa tavola i prodotti di due numeri espressi da una cifra sola, si cerca il moltiplicando nella prima linea orizzontale, quindi si scende da questo verticalmente finchè si giunga ad una linea orizzontale della quale il moltiplicatore sia la prima cifra: il numero, che si trova nell'incontro della linea orizzontale del moltiplicatore, e della linea verticale del moltiplicando, è il prodotto dei due numeri.

La maniera di servirsi di questa tavola si deduce facilmente dal principio secondo il quale si è formata. Si voglia, per esempio, il prodotto di 6 per 7: tutti i prodotti per 7 essendo nella settima linea, fo attenzione qual numero di questa linea si trova precisamente al di sotto del numero 6 della prima linea orizzontale; questo numero essendo 42, dico che 42 è il prodotto di 6 per 7.

35. Esaminando la tavola di Pitagora si vede che nei prodotti dei numeri di una cifra si può prendere indistintamente per moltiplicando e moltiplicatore uno de' due fattori, perchè il prodotto rimane lo stesso, giacchè $3 \times 7 = 7 \times 3 = 21$: $5 \times 8 = 8 \times 5 = 40$: ed in generale si può stabilire; *il prodotto resta lo stesso quando i fattori restano gli stessi qualunque sia l' ordine col quale si moltiplicano.*

L' analogia conduce a pensare, che questa proprietà di potere invertire l' ordine de' fattori non appartenga ai soli numeri di una cifra, ma anco ai numeri di più cifre; e siccome questa proprietà si estende realmente a tutti i numeri, accingiamoci a dimostrarlo. La dimostrazione che son per fare è applicata a numeri particolari, ma lo stesso ragionamento potrà applicarsi a qualsivoglia numero. Supponiamo che si voglia moltiplicare 5 per 3. Moltiplicare cinque per tre equivale a ripetere il 5 tre volte. Ora sarà la stessa cosa ripe-

tere 3 volte le unità componenti il 5; sciolgo perciò il 5 nelle sue unità, e ripeto il 5 così sciolto per 3 volte, come viene rappresentato dal quadro o figura, (A)

A

. . . . .
. . . . .
. . . . .

che contiene tutte le unità del prodotto di 5 per 3: dunque esprime il prodotto di 5 per 3, cioè 5×3. Se adesso si rovescia la figura in modo che le linee verticali divengano orizzontali, si formerà la figura, (B)

B

. . .
. . .
. . .
. . .
. . .

e vedremo che la linea orizzontale è composta di 3 unità, ed è ripetuta 5 volte. Ma le 3 unità formano il 3, e questo 3 è ripetuto 5 volte; dunque la figura (B) rappresenta il prodotto di 3 per 5, ossia 3×5: rovesciando però la figura non si è alterato il numero delle unità che conteneva; dunque la figura (A) è identica con la figura (B); dunque il prodotto di 5 per 3 è lo stesso del prodotto di 3 per 5. Il ragionamento, che abbiamo fatto, è indipendente da qualsivoglia numero particolare, e perciò applicabile a qualunque numero: dunque possiamo concludere, che il prodotto di due numeri non varia, variando l'ordine de' fattori.

36. La proprietà precedente si verifica ancora quando i fattori siano tre: infatti sia da moltiplicarsi 3 per 5, e il prodotto per 4; ovvero abbiasi $3 \times 5 \times 4$. Il 3 moltiplicato per 5 darà $3 + 3 + 3 + 3 + 3$. Se questo prodotto si moltiplica per 4 avremo

$$3 . 4 + 3 . 4 + 3 . 4 + 3 . 4 + 3 . 4,$$

ossia il 3×4, ripetuto per 5 o moltiplicato per 5, vale a dire in tutto $3 \times 4 \times 5$: dunque $3 \times 5 \times 4 = 3 \times 4 \times 5$. Si

può dunque cangiare di posto i due ultimi fattori senza cangiare il prodotto. E siccome abbiamo veduto (n.° 35) che si potevano cangiare i due primi fattori senza alcuna alterazione, così potremo stabilire le seguenti uguaglianze

$$3\times5\times4=5\times3\times4=3\times4\times5=4\times3\times5=4\times5\times3=5\times4\times3.$$

Si vede dunque che *possiamo invertire in tutte le maniere possibili l'ordine dei tre fattori senza alterare il prodotto.*

Parimente si dimostrerebbe che il prodotto di 4 fattori non varia variando l'ordine di essi. Dimostrato il principio per quattro fattori, si stabilirà la stessa regola per 5, per 6, ec. Dunque qualunque sia l'ordine e il numero dei fattori il prodotto rimane sempre lo stesso.

37. Consideriamo adesso il caso, in cui il moltiplicando sia rappresentato da più cifre, ed il moltiplicatore da una sola cifra.

Partendo dalla definizione della moltiplicazione, che dice doversi il moltiplicando ripetere tante volte quante unità sono contenute nel moltiplicatore, otterremo il prodotto scrivendo in colonna il moltiplicando tante volte, quante unità sono nel moltiplicatore, e quindi facendone l'addizione.

Infatti sia da moltiplicarsi 5736 per 4: si scriverà 5736 quattro volte, come qui sotto, e la somma 22944, che se ne ottiene, sarà il prodotto di 5736 per 4

$$\begin{array}{r} 5736 \\ 5736 \\ 5736 \\ 5736 \\ \hline 22944 \end{array}$$

Ma è evidente che ciò equivale a prendere successivamente 4 volte le 6 unità del moltiplicando, 4 volte le 3 diecine, ec. ed a fare la somma di tutti questi prodotti.

Così, dopo aver disposto il moltiplicatore 4 al disotto del moltiplicando, come nell'esempio apposto, e dopo aver sullineato il tutto,

5736
4
———
22944

si dice: 4 volte 6 fanno 24 (*vedi* la tavola di Pitagora) ossia 2 diecine e 4 unità; si pone 4 sotto le unità, e si ritiene le 2 diecine per riunirle al prodotto delle diecine del moltiplicando per 4.

Quindi si dice: 4 volte 3 fanno 12 e 2 di ritenute fanno 14 diecine, o 1 centinaio e 4 diecine; si pone 4 nel posto delle diecine e si ritiene 1 centinaio;

4 volte 7 fanno 28 e 1 di ritenute fanno 29 centinaia, o 2 migliaia e 9 centinaia; si pone 9 al posto delle centinaia e si ritiene 2.

Finalmente 4 volte 5 fanno 20 e 2 di ritenute fanno 22, che si scrive per intero, giacchè non vi sono più cifre da moltiplicarsi.

Si trova così 22944 per il prodotto domandato.

Donde si vede che *per moltiplicare un numero di più cifre per un numero di una sola cifra bisogna moltiplicare successivamente, cominciando da destra, le unità di ciascun ordine del moltiplicando pel moltiplicatore: si scrive il prodotto tutto intero allorchè non passa il* 9, *ma se esso contiene delle diecine, queste si ritengono per unirle al prodotto seguente, e si continua in questa maniera fino all' ultima cifra a sinistra del moltiplicando, della quale se ne scrive il risultamento tale quale si trova.*

38. È certo che se il moltiplicando fosse terminato da più zeri, come 2600, l'operazione non dovrebbe principiarsi che dalle cifre significative, e al prodotto di queste bisognerebbe aggiunger tanti zeri quanti sono nel moltiplicando. Infatti se si supponesse il moltiplicando scritto in colonna tante volte quante dev'esser ripetuto, nel far la somma (che noi chiamiamo prodotto) si dovranno alla destra scrivere tanti zeri quante sono le linee verticali composte di zeri, e queste sono tante quanti sono gli zeri del moltiplicando, come si vede nell' esempio che segue di 2600 per 4

2600
2600
2600
2600
———
10400

Il metodo tenuto nell'eseguire questa moltiplicazione non cangia anco nel caso che il moltiplicatore fosse di più cifre.

Se framezzo le cifre del moltiplicando vi fossero degli zeri, essi non danno, come è evidente, nessun prodotto, e si dee per conseguenza porre uno zero allorchè non avremo alcuna ritenuta del prodotto precedente.

Ecco degli esempi di moltiplicazione per esercitare i giovani

7641	7300	9300601
8	6	9
61128	43800	83705409

39. Si rende inutile di parlare del terzo caso, vale a dire di moltiplicare un numero di una sola cifra per un numero di più cifre, perchè potendosi, come abbiamo veduto (n.° 36), invertire l'ordine dei fattori, si ridurrà questo al secondo caso.

40. Avanti di passare al quarto caso, nel quale il moltiplicatore è composto di due o più cifre, indicheremo il mezzo di rendere un numero 10, 100, 1000.... volte più grande, o di moltiplicarlo per 10, 100, 1000....

Risulta evidentemente dal principio fondamentale della nnmerazione (n.° 10), che, se poniamo uno 0 alla destra di un numero già scritto, ciascuna delle cifre significative di questo numero avanzando di un posto verso la sinistra, esprime delle unità dieci volte maggiori di quelle che esprimeva prima, ossia diviene dieci volte più grande. Medesimamente ponendo due zeri, il numero si rende 100 volte più grande, poichè ogni sua cifra essendo avanzata di due ordini verso la sinistra, esprime delle unità 100 volte maggiori, e così di seguito.

Dunque *per moltiplicare un numero intero qualunque per*

10, 100, 1000, ec., *basta scrivere alla sua destra* 1, 2, 3, ... *zeri.*

Così i prodotti di 378 per 10, 100, 1000, 10000, ec., sono 3780, 37800, 378000, 3780000.....

41. Supponiamo adesso che si debba moltiplicare un numero di più cifre per un numero espresso da una sola cifra significativa seguita da uno o più zeri; per esempio si debba moltiplicare 465 per 400: si sa (n.° 35) che si ottiene lo stesso prodotto tanto se si moltiplica 465 per 400, quanto se si moltiplica 400 per 465, perciò invece di moltiplicare 465 per 400, si moltiplicherà 400 per 465. Ma dal (n.° 38) si sa che per moltiplicare un numero seguito da più zeri, si possono moltiplicare le sole cifre significative, ed aggiungere in seguito al prodotto tanti zeri, quanti se ne trovavano nel moltiplicando; perciò invece di moltiplicare 400 per 465, si moltiplicherà 4 per 465 e si aggiungerà due zeri al prodotto: ma 4×465 è lo stesso che 465×4; dunque si conclude che per moltiplicare un numero qualunque per un numero espresso da una sola cifra seguita da più zeri, si moltiplicherà il primo numero per la detta cifra, e si aggiungeranno gli zeri al prodotto.

42. Si debba adesso moltiplicare 9647 per 739

$$\begin{array}{r} 9647 \\ 739 \\ \hline 86823 \\ 289410 \\ 6752900 \\ \hline 7129133 \end{array}$$

Si comincia dal disporre il moltiplicatore al di sotto del moltiplicando in modo, che le unità di un medesimo ordine siano in una medesima colonna, e si sullinea il tutto. Ciò stabilito osservo che il 739 si decompone nelle unità dei diversi ordini nel modo seguente

$$700 + 30 + 9;$$

dunque il 9647 dev' esser preso 9 volte, più 30 volte, più 700, il che equivale a dire, bisogna moltiplicare il 9647 per

9, poi per 30, e finalmente per 700, e sommare quindi tutti i prodotti parziali per avere il prodotto totale di 9647 preso 739 volte, come nell'esposto esempio. Nella pratica ci si dispensa dall'aggiungere ai prodotti parziali gli zeri, perchè questi non influiscono nella somma che si deve fare in fine, avvertendo però di scalare il prodotto della cifra significativa di tanti ordini, quanti sono gli zeri che si sarebbero dovuti scrivere.

Possiamo dunque dare adesso la seguente regola generale per la moltiplicazione di un numero di più cifre per un numero di più cifre: *si formano successivamente i prodotti del moltiplicando per i diversi ordini di unità del moltiplicatore, cominciando dalle unità, poi per le diecine ec., e si scrivono questi prodotti parziali in modo che ciascuno sia avanzato di un ordine verso la sinistra per rapporto al precedente; e finalmente si sommano tutti i prodotti parziali.*

Da quanto si è esposto si vede, che sarebbe indifferente cominciare a moltiplicare dalla cifra dell'ordine superiore, o da quella dell'ordine inferiore; solamente nel primo caso bisognerebbe scalare gli altri prodotti verso la destra.

43. Alcune volte una o più cifre del moltiplicatore sono zeri, ed allora conviene modificare un poco la disposizione dei prodotti parziali.

Sia da moltiplicare 870497
Per 600407

```
        6093479
      3481988
    5222982
    ----------
    522652492279
```

Si moltiplica in primo luogo tutto il moltiplicando per 7; ciò dà il prodotto 6093479.

Adesso siccome non vi sono diecine al moltiplicatore, si passa alla moltiplicazione per 4, cifra delle centinaia del moltiplicatore, ciò dà il prodotto 3481988; e siccome bisogna fargli esprimere delle *centinaia*, si pone sotto il primo prodotto avanzandolo di *due* posti verso la sinistra.

Similmente siccome non vi sono nè *migliaia*, nè *diecine di migliaia* nel moltiplicatore, si passa alla moltiplicazione

per 6, cifra delle *centinaia di migliaia*, e si scrive il prodotto 5222982 sotto il precedente, avanzandolo di *tre* posti verso la sinistra.

In generale, *quando si trova uno o più zeri fra due cifre significative del moltiplicatore, dopo aver fatto il prodotto parziale per la cifra significativa alla destra degli zeri, si passa a far quello per la cifra significativa alla sinistra, e si avanza quest' ultimo prodotto parziale, di tanti posti più uno verso la sinistra, rapporto al prodotto precedente, quanti zeri intermedi vi sono fra le due cifre significative.*

Per esser sicuri di evitare qualunque errore nello scalare i prodotti parziali, si scriveranno tutti in modo che la prima cifra a destra del prodotto parziale si trovi nella stessa linea verticale, nella quale si trovano le unità dello stesso ordine della cifra per la quale si moltiplica. La ragione ne è semplicissima: infatti si è veduto che i prodotti si scalano perchè si tralascia di scrivere gli zeri (n.° 42) e perciò i prodotti si scalano di tante cifre quanti sono gli zeri che si tralasciano. Ora questi sono sempre tanti quante sono le cifre alla destra della cifra per cui si moltiplica; dunque bisognerà scalare ciascun prodotto di tanti ordini quante sono le cifre alla destra di quella per la quale si moltiplica, ossia porre la prima cifra a destra del prodotto nello stesso ordine della cifra per la quale si moltiplica.

44. Se i due fattori fossero terminati da uno o più zeri si ragionerà nel modo seguente: si abbia 5300 da moltiplicarsi per 410; primieramente osservo che se si dovesse moltiplicare 5300 per 41 per quanto si è detto (n.° 38) basterà moltiplicare le cifre significative 53 per 41 e al prodotto aggiungere 2 zeri. Ma come si è ugualmente veduto (n.° 42), moltiplicare per 410 è lo stesso che ripetere 10 volte il prodotto per 41; dunque per questa seconda moltiplicazione si dovrà aggiungere un nuovo zero, che in tutto saranno 3, cioè tanti quanti se ne trovano nei due fattori.

45. *Si abbia adesso il numero* 763 *da moltiplicare per* 48, *numero che è uguale a* 6 *volte* 8. Dico che moltiplicare 763 per 48 equivale a moltiplicare 763 per 6 ed il risultamento per 8.

Per provare questa proposizione senza effettuare il calcolo, basta impiegare un ragionamento analogo a quello del

numero (37). Moltiplicare 763 per 48, vuol dire far la somma di 48 numeri uguali a 763. Ora, questi 48 numeri scritti gli uni sotto gli altri formano evidentemente 6 sezioni di 8 numeri uguali a 763; dunque dopo aver moltiplicato 763 per 8, bisogna prendere questo prodotto 6 volte. Così, moltiplicare 763 per il prodotto 48 dei due fattori 8 e 6, equivale a moltiplicare 763 per 8 e il risultamento per 6.

Siccome 8 è ancora uguale al prodotto di 2 per 4, possiamo ancora dire che moltiplicare 763 per 48, equivale a moltiplicare prima il 763 per 2, il risultamento ottenuto per 4, e finalmente il nuovo risultamento per 6.

Questo ragionamento potendo ancora applicarsi ad altri numeri, risulta questa proposizione generale: *moltiplicare un numero per un prodotto già effettuato di due o più fattori, equivale a moltiplicare il numero successivamente per ciascuno dei fattori.*

46. Abbiamo osservato essere indifferente il cominciare a moltiplicare dalla cifra dell'ordine più elevato del moltiplicatore o dalla cifra dell'ordine inferiore; ma sarà egli ugualmente indifferente nel fare i prodotti parziali, il cominciare dalla destra ovvero dalla sinistra del moltiplicando? nò; perchè se invece di comiuciare dalla destra si cominciasse dalla sinistra, saremmo spesso obbligati a tornare indietro per rettificare una cifra già scritta, ed aumentarla di tante unità quante fossero le diecine ottenute nel moltiplicare la cifra seguente del moltiplicando per la cifra del moltiplicatore. Per evitare questo inconveuiente, e non per la natura intrinseca della moltiplicazione, si comincia da destra. Se ciascun prodotto non oltrepassasse il 9, siccome allora non vi sarebbe luogo ad alcuna correzione nelle cifre scritte, si potrebbe cominciare la moltiplicazione dalla sinistra.

47. Quando il moltiplicatore non ha che una cifra si forma ciascun prodotto parziale, e non si scrivono di esso che le unità ritenendo le diecine per aggiungerle al prodotto seguente. Quando finalmente si arriva a formare il prodotto della cifra più elevata del moltiplicando, si scrive tutto intero questo prodotto che avrà una o due cifre, e nel 1.° caso il prodotto totale avrà tante cifre quante ne ha il moltiplicando, e nel 2.° una di più, poichè l'ultimo prodotto parziale

non può essere di tre cifre. Infatti supponendo che la cifra più elevata del moltiplicando e la cifra del moltiplicatore sieno le massime possibili, cioè 9, non si avrebbe che 81 di prodotto a cui aggiungendo il massimo numero di diecine portate dal prodotto precedente che sarà 8 avremo 89 in tutto, numero di due cifre.

48. Quando il moltiplicatore ha più cifre si moltiplica per ciascuna separatamente avanzando il prodotto di un ordine verso la sinistra. Se non si considera che l' ultimo prodotto, è facile vedere che esso deve avere tanti zeri alla destra quante sono le cifre del moltiplicatore meno una, di più le cifre di questo prodotto parziale sono (n.° 47) o tante quante ne ha il moltiplicando o una di più, dunque le cifre del prodotto totale sono tante quante sono le cifre dei due fattori o una di meno.

DELLA SOTTRAZIONE

49. Un padre ha 69 anni e fra il padre e il figlio ci corrono 39 anni. Qual è l'età del figlio? Un possidente ha in un bosco 52 querce; ne ha fatte tagliare 30, quante ne sono restate?

Che cosa si cerca in ambedue le questioni? Non si cerca altro che di togliere una quantità da un' altra, e vedere quale sia la quantità che resta; ossia togliere dalle unità componenti un numero, tante unità quante ne sono contenute in un altro, e vedere qual sia il numero delle unità rimanenti. È dunque necessario trovare un metodo, un' operazione aritmetica che ci conduca a conoscere qual sia questo numero di unità rimanenti. Questa operazione è stata chiamata *sottrazione* che può definirsi: *un' operazione aritmetica per mezzo della quale si tolgono dalle unità di un numero tante unità quante ne sono contenute in un altro numero più piccolo.*

50. Per indicare che le unità di un numero debbono togliersi alle unità di un altro; per indicare che un numero dee diminuirsi di tante unità quante se ne trovano in un altro, in sostanza per indicare la sottrazione, si pone avanti al numero, le cui unità debbono sottrarsi, il segno — che si enuncia *meno* e chiamasi segno *negativo*: così 9 — 5 significa che dalle nove unità contenute nel primo numero,

debbono togliersi le cinque unità contenute nel secondo, e si enuncia 9 meno 5.

Il numero da cui deve togliersi un altro numero dicesi *minuendo*, vale a dire numero che dev' esser diminuito; in fatti se da esso dee togliersi un' altro numero, è certo che il numero che rimarrà sarà minore.

Il numero che dee togliersi dicesi *sottraendo* ed ancora *minutore* (vale a dire che diminuisce).

Il risultamento poi della sottrazione, ossia il numero delle unità che rimangono al *minuendo* dopo che gli sono state tolte le unità del *minutore*, dicesi *resto* o *avanzo*.

51. Imparato il linguaggio tentiamo di eseguire la sottrazione, e cominciamo dal caso in cui tanto il minutore che il minuendo siano rappresentati da una sola cifra, e sia per esempio da eseguirsi la sottrazione indicata da 9 — 4.

Il metodo più semplice è quello di togliere ad una ad una tutte le unità del minutore dalle unità del minuendo: per esempio poichè 4 è lo stesso che 1 + 1 + 1 + 1, avremo ugualmente il resto sia che si tolga 4 da 9, ossia che si tolga 1 quattro volte di seguito; così facendo avremo 9 — 1 ossia 8, 8 — 1 ossia 7, 7 — 1 ossia 6, 6 — 1 ossia 5; 5 è il resto cercato di 9 — 5.

Così togliendo dal numero da cui si dee sottrarre, il numero 1 tante volte di seguito, quante ne indica il minutore, potremo sempre eseguire facilmente la sottrazione di una cifra da una cifra. Fa d' uopo esercitarsi in tali sottrazioni per abituarsi a farle a mente con prontezza, poichè ad esse si riducono tutte le sottrazioni de' numeri maggiori, appunto come vedemmo, che tutte le addizioni si riducono a quelle di numeri rappresentati da una cifra sola (n.° 22).

52. Sebbene il metodo esposto sia sicuramente il più naturale, non ostante ha seco unita una tale lunghezza di calcolo, che ne rende impraticabile l'uso specialmente quando i numeri sieno molto grandi.

Ciò posto per rintracciare qual debba essere il metodo più sbrigativo per effettuare la sottrazione, stabiliamo in che essa consista. Abbiamo veduto che essa consiste nel togliere dalle unità di un numero le unità contenute in un altro numero; dunque decomponiamo un numero nei suoi diversi ordini di

unità, e togliamo le unità di un ordine del minutore dalle unità dello stesso ordine del minuendo, ed allora eseguiremo la sottrazione, come conviene: per esempio per eseguire la sottrazione indicata da 87 — 63, osservo che 87 rappresenta 8 diecine e 7 unità, e che 63 rappresenta 6 diecine e 3 unità, ossia il 1.° numero è 80 + 7 e il secondo 60 + 3. È quindi evidente che sottrarre 63 da 87 è lo stesso, che sottrarre 6 diecine e 3 unità da 8 diecine e 7 unità; onde tolgo le 3 unità di 1.° ordine del minutore dalle unità 7 di 1.° ordine del minuendo, e avanzano 4 unità di 1.° ordine; ugualmente tolgo le 6 unità di 2.° ordine del minutore dalle 8 unità di 2.° ordine del minuendo e avanzano 2 unità di 2.° ordine, e così essendo rimaste 4 unità di 1.° ordine e 2 di 2.° ordine, il resto totale sarà 24.

53. Abbiamo veduto nell'esempio precedente che le unità di uno stesso ordine debbono sottrarsi dalle unità dello stesso ordine, la ragione è evidente: infatti non è in alcun modo concepibile che si possa sottrarre una quantità di una data specie da una quantità di specie diversa; ma è necessario che le quantità sieno omogenee, vale a dire della stessa specie.

Poichè le unità di un ordine non possono sottrarsi che dalle unità dello stesso ordine, così per ritrovare più facilmente nel minutore e nel minuendo le unità di uno stesso ordine, fu pensato di collocare il minutore al di sotto del minuendo in modo, che le unità di uno stesso ordine si trovassero in una stessa colonna verticale. Così avendo da sottrarre 3423 da 6794, si scrivono questi numeri come qui sotto, e si eseguisce la sottrazione colonna per colonna come abbiamo fatto nel (n.° 52).

$$\begin{array}{r} 6794 \\ 3423 \\ \hline 3371 \end{array}$$

Una tale disposizione de' numeri non dipende dalla natura intrinseca della sottrazione, ma per il semplice comodo di ritrovare le unità di uno stesso ordine.

54. Abbiamo veduto potersi sempre effettuare la sottra-

zione, purchè il numero espresso dal minuendo sia maggiore del minutore. Ma nel metodo esposto nei paragrafi precedenti abbiamo ancora tacitamente supposto che tutte le cifre del minutore sieno ciascuna minori delle cifre corrispondenti d'ordine nel numero superiore; onde se tutte o alcune o anche una sola delle cifre del minutore fossero maggiori delle cifre corrispondenti nel minuendo, potremo noi eseguire la sottrazione colle sole regole date? Vediamone un esempio. Sia 786 il minuendo, e 589 il minutore. Per prima sottrazione parziale si dovrebbe sottrarre la prima cifra 9 del minutore dalla prima cifra 6 del minuendo, e questa sottrazione non si può assolutamente eseguire.

In altri esempi ancora avremo diverse altre sottrazioni parziali che non si potranno eseguire; che faremo dunque in tali casi per ottenere il resto?

Osservo che il numero 786 può esser decomposto in $700 + 70 + 16$ vale a dire che si può prendere un' unità del 2.° ordine e trasportarla nel 1.° ordine ove essa ha un valore dieci volte maggiore; accresciuto dunque in tal modo il 6 di dieci unità di 1.° ordine che compongono la sola unità di 2.° ordine, potremo eseguire la sottrazione ed avremo $16 - 9 = 7$. Volendo seguitare la sottrazione bisogna ricordarsi che le 8 unità di 2.° ordine son divenute 7 per il prestito fatto alle unità di 1.° ordine, onde dovremo togliere 8 da 7 e non da 8; ma ancora in questo caso la sottrazione è impossibile; ricorreremo perciò allo stesso artifizio prendendo un' unità dal 7 e portandola nel 2.° ordine, dove essa acquista un valore dieci volte maggiore ed unita alle 7 unità che vi erano formerà 17 unità di 2.° ordine; così la sottrazione sarà possibile ed avremo $17 - 8 = 9$. Proseguendo l'operazione dobbiamo ugualmente ricordarsi che le 7 unità di 3.° ordine sono divenute 6, e così avremo $6 - 5 = 1$ e il resto totale di $786 - 589$ sarà 197.

55. Qualora si avesse da sottrarre un numero da un altro che avesse più cifre uguali a zero per esempio $380007 - 213856$ potrebbe incontrarsi una nuova difficoltà.

Dopo aver sottratto 6 da 7 resta da sottrarre 5 da zero e non potendosi ciò eseguire, si ricorrerà al prestito, come nel caso precedente, ma come si potrà fare questo prestito

dalla cifra del 3.° ordine quando questa pure è zero? Prenderemo in prestito un'unità dalle 8 unità di 5.° ordine, e questa, portata nel 4.° ordine, acquisterà un valore dieci volte maggiore, ossia sarà equivalente a 10 unità di 4.° ordine. Di queste dieci unità ne lascio 9 nel 4.° ordine, e ne porto 1 nel 3.° ordine dove essa equivarrà a 10 unità di 3.° ordine in forza della legge di numerazione. Di queste ne lascio 9 nel 3.° ordine ed una ne porto nel 2.° ordine dove essa equivarrà a dieci unità di 2.° ordine, e in tal modo la sottrazione sarà resa possibile, e diremo 10 — 5 = 5. Ora, volendo proseguire l'operazione, è da avvertirsi, che tutti gli altri zeri non rappresentano che tanti 9, e la prima cifra significativa, che incontreremo, si dovrà considerare diminuita di un'unità. Così diremo 9 — 8 = 1 : 9 — 3 = 6 : 7 — 1 = 6 : 3 — 2 = 1, e così per resto finale di 380007 — 213856 avremo 166151.

Per ben comprendere, come col metodo impiegato si arriva al risultamento indicato di sopra, può consultarsi il seguente tipo di calcolo.

	cent. di migl.	dieci di migl.	migliaia.	centinaia.	diecine.	unità
1.° numero	3	7	9	9	10	7
2.° numero	2	1	3	8	5	6
	1	6	6	1	5	1

Riepilogando tutti i casi, fin quì considerati, possiamo dare la seguente regola generale per la pratica della sottrazione.

Per sottrarre da un numero un altro numero più piccolo, si pone il secondo al di sotto del primo in modo, che le unità di un medesimo ordine sieno in una medesima colonna: si tira una linea, e quindi si tolgono successivamente le unità dalle unità, le diecine dalle diecine, le centinaia dalle centinaia, ec., e si scrivono i resti parziali gli uni dopo gli altri andando dalla destra verso la sinistra. Il numero espresso dalla riunione di queste cifre è il resto totale o il risultamento domandato.

Allorchè una delle cifre del minutore è più grande della cifra del minuendo, si aumenta col pensiero questa cifra di 10 unità, e si diminuisce la cifra che è alla sua sinistra medesimamente di un'unità.

Se alla sinistra di questa cifra del minuendo, che è più debole di quella del minutore, si trovassero uno o più zeri, questa cifra si immaginerà accresciuta di dieci unità; e in pratica gli zeri si riguarderanno come se fossero tanti 9, come appunto abbiamo fatto nell'esempio antecedente, dove ancora abbiamo diminuito di un' unità la cifra significativa del minuendo, che segue immediatamente alla sinistra di questi zeri.

Ecco i seguenti esempi per esercizio

76374	6783	600107
32141	2846	376898
44233	3937	223209

55. Possiamo pertanto concludere: allorquando si è sottratto un numero minore da uno maggiore, e si è veduto quale ne sia il resto, abbiamo trovato il numero delle unità che il numero maggiore ha di più del numero minore, vale a dire il numero delle unità delle quali il numero maggiore supera, o eccede il numero minore; ed ecco perchè il resto si chiama ancora *eccesso*, o *differenza* del numero maggiore sul minore.

56. Se all' avanzo o al resto si aggiunga ciò che abbiamo sottratto, è chiaro che ne deve risultare il numero maggiore. Infatti sommando il minutore col resto non si fa altro che aggiungere di nuovo quello che si era tolto; dunque fatta questa addizione deve ricomparire il numero primitivo, ovvero il minuendo.

57. Il numero maggiore è uguale al numero minore, più la differenza che passa fra i due numeri; dunque se questa differenza si aggiunge al numero minore, deve risultare il numero maggiore: come viceversa se dal numero maggiore tolgo la sua differenza dal minore, deve risultarne il numero minore.

58. Siccome il minuendo è uguale al minutore aumentato della differenza che passa fra questi due numeri, possiamo dire che il minuendo è la somma del minutore e del resto, o della differenza.

59. Siccome il resto indica tante unità quante ne ha di più il minuendo del minutore, è evidente che se al minuen-

do aggiungo o tolgo una quantità, la differenza o il resto deve rimanere aumentato o diminuito della medesima.

Anzi, siccome il resto indica quante sono le unità che rimangono dopo che dal minuendo si sono tolte le unità del minutore, è chiaro, che se il minutore si aumenta o si diminuisce di più unità, si toglieranno dal minuendo altrettante unità di più o di meno, e per conseguenza il resto rimarrà diminuito o aumentato delle medesime.

Da queste osservazioni si deduce, che se si aumenta o si diminuisce di ugual quantità il minuendo e il minutore, il resto non deve cambiare, perchè l'aumento o la diminuzione del minuendo produce un'effetto uguale e contrario dell'aumento o della diminuzione del minutore: cosicchè i due effetti uguali e contrari si distruggono scambievolmente.

60. Avendo da sottrarre un numero qualunque da un numero composto dell'unità seguita da tanti zeri quante sono le cifre del minutore, il resto che si ottiene dicesi *complemento* del minutore: così 10000 — 3267 = 6733: il 6733 è il complemento aritmetico di 3267.

Per *complemento aritmetico* di un numero s' intende *quel numero di unità, che mancano ad un dato numero per arrivare a formare una somma espressa dall'unità seguita da tanti zeri quante sono le cifre del numero dato.*

Il modo di trovare il complemento aritmetico di un numero è semplicissimo. Si sottrae la cifra delle unità da 10 e tutte le altre cifre da 9; quindi si pone $\bar{1}$ alla sinistra. *Il complemento di un numero aggiunto a questo numero, dà zero per somma. In luogo di sottrarre un numero, possiamo aggiungere il suo complemento aritmetico.*

Quando vi sono più addizioni e sottrazioni successive, l'uso de' complementi può presentare de'vantaggi. Sia, per esempio, 32731 + 5729 — 371 — 4834. Prenderà la sottoposta forma, atteso che i complementi di 371 e 4838 sono $\bar{1}629$ e $\bar{1}5166$.

32731	32731
5729	5729
$\bar{1}629$	— 371
$\bar{1}5166$	— 4834
33255	33255

In seguito si vedranno altre applicazioni del complemento aritmetico.

61. Abbiamo veduto, che la sottrazione si comincia da destra: ma non potrebbe essa cominciarsi da sinistra? Se le cifre del minuendo fossero tutte maggiori di quelle del minutore sarebbe indifferente di cominciare l'operazione da sinistra piuttosto che da destra. Ma siccome molte volte accade, che le cifre superiori sono minori delle inferiori, se si cominciasse da sinistra, saremmo sovente obbligati a tornare indietro per rettificare una cifra già scritta, e diminuirla di un'unità, perchè nel caso, che si dovesse fare il prestito per potere eseguire una sottrazione parziale, la cifra a sinistra diminuirebbe, come si è veduto (n.° 54), di un'unità.

62. Abbiamo veduto che la sottrazione si accenna col segno —. Ma non dobbiamo credere però che appena sia posto questo segno avanti al minutore, l'operazione sia eseguita. Così 37 — 16 non è una sottrazione eseguita, ma da eseguirsi.

Quando la sottrazione è accennata col segno —, risolvendola si otterrebbe il resto o la differenza, come si è veduto. Dunque, siccome non manca altro alla sottrazione accennata che l'esecuzione per avere il risultamento, si può dire che l'operazione accennata non è altro che il risultamento accennato, vale a dire non manca che la materiale esecuzione dell'operazione. 43 — 21 = 22. Il 22 è il resto eseguito del numero 43 dopo che è stato tolto il numero 21; e 43 — 21 è il resto accennato.

63. Conosciuta l'indole dell'addizione e della sottrazione è facile il vedere come queste due operazioni sieno l'una opposta all'altra, mentre quella accresce, questa diminuisce. Infatti nell'addizione si tratta di comporre un numero di più numeri, e nella sottrazione si decompone un numero in due numeri. Colla prima si aumentano i numeri, colla seconda si diminuiscono. Colla prima si aumentano i numeri di tante unità quante ne sono contenute ne' numeri che gli si aggiungono; colla seconda si diminuiscono i numeri di tante unità quante ne sono contenute ne' numeri, che si sottraggono. Se ad una quantità si aggiunge un'altra quantità e poi si sottrae, la prima quantità non rimane alterata, perchè la sottrazione distrugge quello che ha fatto l'addizione e viceversa.

64. Nel modo stesso che l'addizione ripetuta di una stessa quantità condusse ad immaginare una nuova operazione detta moltiplicazione, parimente dovendosi sottrarre più volte la stessa quantità si è trovato un metodo compendioso per eseguire con brevità questa ripetuta sottrazione, e questo metodo, che potrebbe chiamarsi una sottrazione per compendio, dicesi *divisione*.

DELLA DIVISIONE

65. La distanza da Parigi a Strasburgo essendo di 120 leghe, si cerca in quanti giorni si potrà fare questa strada camminando 5 leghe il giorno. Nel dare una ricompensa di due monete d'argento a varii soldati che si erano distinti in un'azione gloriosa, si sono spese 896 monete. Si domanda quanti sono stati i soldati premiati? Che cosa si cerca in ambedue le riferite questioni? Nella 1.ª si tratta di vedere quante volte le 5 leghe possono esser contenute nelle 120 leghe di distanza da Parigi a Strasburgo, per poter conoscere quante giornate si dovranno impiegare per andare da un luogo ad un altro, e questo si otterrà col vedere quante volte si possono togliere le 5 leghe dalle 120 leghe componenti l'intiera strada: che equivale alla ripetuta sottrazione di 5 da 120; e il numero delle sottrazioni, ossia il numero delle volte che il 5 sarà contenuto in 120, indicherà pure il numero de' giorni cercati. Nella seconda si tratta di cercare quante porzioni uguali a due monete si possono fare delle 896 monete d'argento impiegate nel ricompensare i soldati; e questo si otterrà col vedere quante volte le 2 monete si possono togliere dalle 896 monete, il che equivale alla ripetuta sottrazione di 2 monete dalle 896 monete, e il numero delle sottrazioni, ossia il numero delle parti uguali a 2 monete, che si potranno fare delle monete 896, esprimerà il numero cercato dei soldati. Le due questioni proposte si potrebbero dunque risolvere per mezzo della sottrazione. Ma, come abbiamo fatto osservare parlando della sottrazione, esiste in questo caso un'altra operazione, detta divisione, per mezzo della quale con brevità si eseguisce un'operazione, che, colla sottrazione, riuscirebbe laboriosissima. Si può dunque legittimamente inferire, *che la divisione consiste in una sottrazione compendiosa.*

66. Frattanto osserveremo, che siccome la sottrazione è un metodo inverso dell'addizione; e nei paragrafi (28 e 29) vedemmo, che per avere la somma di più numeri uguali si poteva usare un metodo più pronto dell'addizione, che si chiamò moltiplicazione; così il metodo che noi cerchiamo per poter decomporre o dividere con più prontezza un numero dato in più numeri uguali tutti tra loro, non può non essere un metodo inverso della moltiplicazione. E, come pure vedremo, si potrà dedurre questo metodo dall'esaminare ciò che accade nel decomporre una moltiplicazione, ossia nel decomporre un prodotto ne' suoi fattori.

67. Negli esempi di sopra citati abbiamo veduto, che nella divisione si cerca quante volte un numero possa sottrarsi da un altro. Ma è evidente che il 1.° numero non potrà sottrarsi dal 2.° che tante volte quante vi è contenuto. Dunque il numero delle volte che il 1.° si è sottratto dal 2.° esprime pur anco il numero delle volte che esso vi è contenuto; dunque la divisione può definirsi: *un' operazione per mezzo della quale si trova quante volte un numero è contenuto in un altro.*

68. Il numero che contiene una volta o più volte un secondo numero, dicesi *dividendo.* Il numero che una sola volta o più volte è contenuto in un altro, dicesi *divisore.* Il numero delle volte che un numero contiene un altro, dicesi *quoziente*, o *quoto.*

69. Per accennare la divisione di un numero per un altro, ossia per accennare quante volte il 1.° numero contenga il 2.°, si pone il dividendo al di sopra, e il divisore al di sotto, separandoli con una lineetta orizzontale (—). Così dovendosi cercare quante volte il 24 contenga il 6, si accennerebbe in tal modo $\frac{24}{6}$. Si accenna però la divisione ancora ponendo il dividendo a sinistra, e il divisore a destra, separandoli con due punti (:). Così la divisione precedente si sarebbe ancora accennata in tal modo 24 : 6.

70. Siccome da quanto abbiamo esposto di sopra si vede, che il dividendo contiene il divisore tante volte, quante unità ha il quoziente, così esso non è altro che il prodotto del divisore moltiplicato pel quoziente. Ma il quoziente è il numero che si cerca nella divisione: dunque nella divisione si cerca un

numero per cui moltiplicato il divisore, si riproduca il dividendo. Da ciò si conclude, che il dividendo è un prodotto, che ha per divisore il moltiplicando, e il quoziente, come moltiplicatore. Perciò possiamo dire che la divisione *è un' operazione per mezzo della quale essendo dato un prodotto, e il moltiplicando, si trova il moltiplicatore.* Osservando però che in una moltiplicazione si può prendere per moltiplicando o per moltiplicatore quale de' due fattori si vuole, non si potrà asserire con sicurezza che il divisore di una divisione sia veramente il moltiplicando piuttosto che il moltiplicatore e viceversa. Lo stesso si dica rapporto al quoziente. Dovremo dunque concludere più generalmente, che la divisione *è un' operazione per mezzo della quale dato un prodotto ed un fattore si cerca l' altro fattore.* Il dividendo dunque nella divisione corrisponde al prodotto nella moltiplicazione, e il divisoro e quoziente corrispondono ai fattori. Se pertanto è dato un prodotto e il moltiplicando, sarà facile colla divisione trovare il moltiplicatore. Se poi sarà dato il prodotto e il moltiplicatore, e si cercherà il moltiplicando, si supporrà invertito l' ordine de' fattori, e faremo moltiplicando il moltiplicatore dato, e viceversa.

71. Dal poter ricercare per mezzo della divisione e il moltiplicando e il moltiplicatore, si discende ad una importantissima conseguenza, cioè che la divisione serve a far conoscere quante parti si possano fare di un numero, conoscendo la grandezza d'una di esse. Infatti quando si sarà conosciuto il numero delle parti, se per questo si moltiplica la grandezza di una parte, ne deve risultare il numero primitivo, perchè con ciò non si fa altro che ricongiungere insieme tutte le parti, che si sono formate del numero. Dunque in sostanza si cerca un numero per cui moltiplicandone un altro, si abbia per prodotto un numero dato. Ma questo appunto è l' oggetto della divisione, dunque la divisione serve allo scopo accennato. Di più la divisione serve ancora a trovare la grandezza di una parte di un numero, conoscendo il numero delle parti che si vogliono fare. Infatti quando si sarà conosciuta la grandezza di una di queste parti, se questa si ripete tante volte quante sono le parti, ossia se si moltiplica pel numero cognito delle parti, si deve ricomporre il numero primitivo, perchè non si fa altro che riunire insieme tutte le parti nelle quali era stato

decomposto il numero: dunque in sostanza si cerca un numero, che moltiplicato per un altro, riproduca un terzo numero dato: ma questo pure ha per oggetto la divisione, dunque la divisione serve all'oggetto accennato. Riepilogando quanto si è detto sulla divisione, vediamo, che questa considerata sotto diversi aspetti è capace di diverse definizioni:

I. Un'operazione per mezzo della quale si cerca un numero, che moltiplicato per un altro, ne riproduca un terzo dato.

II. Un'operazione per mezzo della quale dato un prodotto e uno dei fattori, si trova l'altro fattore.

III. Un'operazione per mezzo della quale si trova quante volte un numero è contenuto in un altro.

IV. Un'operazione per mezzo della quale si divide un numero in tante parti uguali quante unità sono contenute in un altro.

72. Passiamo adesso alla maniera pratica di effettuare la divisione.

Si distinguono prima di tutto due casi:

1.° Che il divisore sia maggiore del dividendo.

2.° Che il divisore sia minore del dividendo.

Nel primo caso la divisione non può effettuarsi, e perciò rimane soltanto accennata.

Il secondo caso si suddivide in altri due casi.

1.° Quando il divisore è di una sola cifra.

2.° Quando il divisore è di più cifre. Veniamo a discutere il primo caso.

73. Come abbiamo già veduto, si potrebbe per mezzo di replicate sottrazioni ottenere il quoziente; ma nel fare appunto con brevità queste sottrazioni consiste la divisione. Quando *il quoziente della divisione di un numero di una o di due cifre, per un numero di una sola cifra, non dev' essere che di una sola cifra*, potremo determinarlo per mezzo della tavola di Pitagora, poichè essendo il quoziente e il divisore di una sola cifra, il loro prodotto (che per noi è il dividendo) deve trovarsi nella tavola di Pitagora.

Per esempio, se si trattasse di dividere 35 per 7, e si cercasse nella detta tavola quel numero che moltiplicato per 7 dasse 35, si troverebbe, che questo numero è 5. Vediamo però

che non tutti i numeri possono esattamente dividersi per un divisore dato. Per esempio 65 non si può dividere per 9: infatti se si cerca nella tavola di Pitagora un numero, che moltiplicato per 9 dia il 65, non si potrà trovare; poichè vi sarà il 7 che moltiplicato per 9 darà 63, e l'8 moltiplicato per 9 darà 72: ora il quoziente 7 sarebbe troppo piccolo, e il quoziente 8 sarebbe troppo grande: ciò conduce a concepire dei numeri diversi dai numeri interi, i soli che si conoscano finora. In seguito ritorneremo sopra queste considerazioni, e frattanto contentiamoci di osservare, nel caso nostro, che il quoziente cade fra 7 e 8, ossia che 65 diviso per 9 dà un resto 2, perchè $65 = 9 \times 7 + 2$.

Vedremo in seguito che cosa sia necessario fare di questo resto. Intanto è evidente che se esso si aggiunga al prodotto del divisore pel quoziente, ne deve risultare l'intero dividendo; infatti il prodotto del divisore pel quoziente è il minutore; e il dividendo è per noi il minuendo. Sappiamo inoltre dalla sottrazione che il minutore aggiunto al resto deve dare il minuendo. Dall'indole del resto si scorge pur anco che esso non può essere nè maggiore nè uguale al divisore: infatti siccome nella divisione, quando essa non può farsi esattamente, si cerca il maggior numero di volte che il dividendo contiene il divisore, se il resto fosse uguale o maggiore del divisore, ciò significherebbe nel 1.° caso, che il divisoro starebbe esattamente una volta di più nel dividendo perchè si potrebbe sottrarre un'altra volta dal medesimo, e nel 2.° caso vi potrebbe stare una o più volte di più per la stessa ragione.

74. Passiamo adesso al caso in cui *il divisore sia di una cifra, il quoziente sia di più cifre.*

La prima difficoltà che s'incontra è quella di determinare il numero del quoziente, ossia l'ordine delle più alte unità del medesimo. Per giungervi osserviamo, che se la cifra a sinistra del dividendo fosse maggiore del divisore, il quoziente conterrebbe delle unità della stessa specie della cifra che si considera nel dividendo; poichè se si supponesse per quoziente l'unità dello stesso ordine della cifra a sinistra del dividendo, moltiplicandola pel divisore darebbe un

numero che non potrebbe esser maggiore del dividendo; dunque il quoziente in tal caso dovrà avere unità dello stesso ordine di quello delle più alte unità del dividendo, e così avrà tante cifre quante ne avrà il dividendo. Se poi la cifra a sinistra del dividendo fosse minore del divisore, allora il quoziante non potrà avere alcuna cifra dello stesso ordine di quella del dividendo, perchè se avesse almeno un'unità di quell'ordine moltiplicata pel divisore, darebbe un prodotto maggiore del dividendo; dunque in questo caso il quoziente avrà una cifra di meno del dividendo.

Determinato il numero delle cifre del quoziente passiamo a determinare quali sieno in particolare queste cifre.

Si debba dividere 40376 *per* 7

```
40376 | 7
35    | 5768
 53
 49
  47
  42
   56
   56
    0
```

Per la dimostrazione precedente osservo, che il quoziente avrà 4 cifre. Per l'indole della divisione vedo che se si moltiplica per 7 il quoziente incognito, dee risultarne il dividendo, vale a dire, moltiplicando per 7 le unità del quoziente si avranno 6 unità, più forse qualche diecina, che si porterà nella classe delle diecine. Moltiplicando in seguito per 7 le diecine incognite del quoziente, e al prodotto aggiungendo le diecine che si saranno portate, si dovrà avere 7 diecine e forse qualchè centinaio, che si porterà nella classe delle centinaia. Moltiplicando per 7 la cifra delle centinaia incognite del quoziente, e al prodotto aggiungendo le centinaia portate, si dovrà avere 3 centinaia e forse ancora qualche migliaio. Finalmente moltiplicando per 7 la cifra incognita delle

migliaia del quoziente, e al prodotto aggiungendo le migliaia, che si saranno portate, si dovrà avere in tutto 40: dunque se si separano dal dividendo le due cifre 40, queste debbono contenere il prodotto della cifra incognita delle migliaia del quoziente, più quello che si è portato dal prodotto delle centinaia del quoziente. Se si potesse separare il prodotto delle migliaia del quoziente da quello che si è portato dal prodotto delle centinaia, si dividerebbe il 1.° prodotto pel divisore, e si avrebbe la cifra delle migliaia del quoziente: ma poichè questo non è possibile, si cercherà il maggior numero di volte che il divisore è contenuto nelle cifre 40 separate.

Il numero trovato esprimerà le migliaia del quoziente, e il resto sarà quello che si è portato dal prodotto delle centinaia. Così facendo saremo sicuri di aver trovato la vera cifra delle migliaia del qnoziente. Infatti la vera cifra del quoziente non può esser nè maggiore nè minore di quella, che, col metodo indicato, abbiamo trovato, che, nel nostro caso, è 5. Non può esser maggiore, perchè se si aumentasse di una sola unità la cifra trovata, il suo prodotto sarebbe maggiore di 40, giacchè noi abbiam preso per cifra delle migliaia il maggior numero di volte, che il divisore è contenuto nelle cifre separate del dividendo, e perciò non potrebbe esservi contenuto, nè potrebbe essere da quello sottratto. Non può esser minore, perchè snpponendo zero tutte le altre cifre del quoziente, il prodotto della prima cifra del quoziente pel divisore si trova di già contenuto nel dividendo e non può in conseguenza esser sottratto. Si sottrae dunque il prodotto delle migliaia, che è 5×7 o 35, e il resto 5376 esprimerà il prodotto di 7 per le centinaia, diecine, e unità del quoziente, per determinare le quali si terrà precisamente lo stesso metodo e ragionamento che abbiamo tenuto per determinare la cifra delle migliaia.

Potremo dunque dare la seguente regola generale per la pratica della divisione nel caso che il divisore sia di una sola cifra, e il dividendo di più cifre.

Si scrive il divisore alla destra del dividendo; si separano ambedue questi numeri con una linea verticale, e si tira una linea al di sotto del divisore: ciò fatto si prende alla sinistra del dividendo una o due cifre secondo che la prima cifra a sinistra del

dividendo contiene o non contiene il divisore: si cerca quante volte questo dividendo parziale contiene il divisore; il quoziente ottenuto si scrive sotto il divisore; si moltiplica il divisore per questa cifra e se ne sottrae il prodotto dal dividendo parziale. Si abbassa accanto al resto la cifra seguente del dividendo, il che dà un secondo dividendo parziale; si cerca, come si era fatto per l'innanzi, quante volte questo secondo dividendo contiene il divisore, si scrive il nuovo quoziente alla destra del primo; si moltiplica il divisore per il secondo quoziente, e se ne toglie il prodotto dal secondo dividendo parziale: accanto al resto si abbassa la cifra seguente del dividendo, e si continua questa serie di operazioni fin a tanto che non si sia abbassata l'ultima cifra del dividendo. Se nell'ultima sottrazione resta zero, la divisione si è fatta esattamente, altrimenti si avrà un resto. Allorchè in una delle divisioni parziali non si ottiene nessun resto, e la cifra seguente del dividendo non contiene il divisore, allora il quoziente mancherà delle unità dell'ordine di quella cifra, onde si dovrà porre in quell'ordine uno zero.

Quando si è acquistato una certa franchezza di calcolo, si fanno a mente le moltiplicazioni e sottrazioni parziali, come si vede nel medesimo esempio qui sotto riportato.

40376	7
53	5768
47	
56	

Nella pratica tutte le volte che il divisore è di una sola cifra, l'operazione si abbrevia, come segue.

Si abbia da dividere 9725640 *per* 8.

9725640	8
1215705	

Dopo avere sullineato il dividendo si dica: l'8 nel nove vi stà 1 una volta, che si scrive al di sotto del 9, e il resto 1 si riunisce col pensiero alla cifra seguente 7, ciò che dà 17. L'8 nel 17 vi stà due volte, che si scrive alla destra dell'1, e dà per resto 1, il quale riunito alla cifra 2, forma 12. L'8 nel 12 vi stà 1 volta, che si scrive alla destra delle due cifre precedenti, e il resto 4, seguito dalla cifra 5, dà 45. L'8 nel

nel 45 vi stà 5 volte con un resto 5, il qual resto unito alla cifra 6 dà 56. L'otto nel 56 vi stà 7 volte: e siccome non si ottiene resto, e la cifra seguente 4 è minore di 8, ciò indica che non vi sono *diecine* al quoziente: allora si mette uno zero per tenerne il posto, e facendo seguire la cifra 4 dalla cifra 0, ciò che da 40, si dice l'8 nel 40 vi stà 5 volte senza verun resto; dunque il quoziente cercato è 1215705.

75. Veniamo a trattare del caso più generale e più complicato, quando cioè il divisore e il dividendo sono composti di più cifre. Si debba dividere, per esempio, 4063136 per 476. La prima difficoltà, che si presenta, è quella di determinare il numero delle cifre del quoziente, ossia la natura delle sue più alte unità. È però evidente, che se alla sinistra del dividendo si separano con una virgola tante cifre quante se ne trovano nel divisore, nel nostro caso tre; e se la riunione di queste cifre contiene il divisore, è certo che il quoziente avrebbe cifre significative nell'ordine nel quale si trova la cifra a destra di quelle separate, poichè se si supponesse per quoziente l'unità dello stesso ordine di quella cifra, moltiplicandola pel divisore darebbe un numero, che non potrebbe esser maggiore del dividendo; dunque in tal caso il quoziente dovrà avere unità dello stesso ordine di quella cifra, e così avrà tante cifre quante sono le cifre alla destra della virgola, più una. Ma, come nell'esempio proposto, se le cifre separate sono minori del divisore, allora il quoziente avrà unità dell'ordine immediatamente inferiore a quello nel quale si trova l'ultima cifra separata, ossia avrà tante cifre quante se ne trovano alla destra della virgola. Infatti non avrà cifre significative nell'ordine dell'ultima cifra a destra delle separate, perchè se ne avesse almeno una, si formerebbe un numero maggiore del dividendo se per questa si moltiplicasse il divisore; ne avrà però nell'ordine della cifra a destra della virgola, perchè supponendo che abbia un'unità sola e per questa si moltiplichi il divisore, il prodotto dee essere minore del dividendo; dunque il quoziente avrà tante cifre quante se ne trovano alla destra della virgola.

76. Determinato il numero delle cifre del quoziente, passiamo a determinare quali sieno in particolare le cifre del medesimo. Per maggior chiarezza cominciamo dall'esaminare

la formazione del prodotto di due numeri composti l'uno e l'altro di più cifre, e da ciò scopriremo la regola generale della divisione. Moltiplichiamo, per esempio, 789 per 563, avremo

789	
563	
2367	*prodotto di* 789 *per* 3
4734	*prodotto di* 789 *per* 60
3945	*prodotto di* 789 *per* 500
444207	*prodotto di* 789 *per* 563.

Proponiamoci adesso il problema inverso di dividere 444207 per 789. Scriviamo il divisore alla destra del dividendo, ed operiamo come segue

	4442.07	789 *divisore*
	3945	563 *quoziente*
1.° resto	4970.7	
	4734	
2.° resto	2367	
	2367	
3.° resto	0	

Dalla composizione del dividendo si vede, che il prodotto del divisore per la prima cifra 5 del quoziente, è contenuto nelle quattro ultime cifre 4442 del dividendo, più le diecine provenienti dagli altri prodotti parziali. Così, avendo separato queste quattro cifre con un punto, è evidente, che per trovare l'ultima cifra 5 in questione, è necessario di cercare quante volte le quattro cifre 4442 contengono il 789. Diremo perciò in 4442 quante volte 789? Ma siccome in questo caso da tavola di Pitagora è insufficiente, osserveremo che 4442 essendo il prodotto di 789 per la cifra cercata, la prima cifra 4, o in suo difetto le due prime cifre 44 devono contenere il prodotto della cifra cercata per la prima cifra 7 del divisore. La questione si riduce perciò a dire: in 44 quante volte 7? Ora se si divide 44 per 7, si ottiene per quoziente

6, che evidentemente è una cifra *troppo grande;* poichè nella moltiplicazione di 789 per 6, il prodotto di 8 per 6 dà 48 diecine, ossia 8 diecine e 4 centinaia da riportarsi sopra il prodotto di 6 per 7 o 42. Proviamo perciò 5. Siccome si trova che 44 contiene il sette 5 volte con un resto sufficiente a contenere gli altri prodotti per 5, ne concluderemo che 4442 contiene 5 volte il divisore 789. Ciò premesso, 4442 contenendo di più le diecine provenienti dagli altri prodotti parziali, per avere queste diecine non è necessario che di moltiplicare 789 per 5, e sottrarre il prodotto da 4442. Avendo dunque scritto 5 al quoziente, moltiplichiamo il divisore per questo numero, portiamo il prodotto 3945 sotto 4442 e facciamo la sottrazione, avremo per resto 497.

Se accanto a questo resto scriviamo le altre due cifre 0 7 del dividendo, è evidente che il numero, che ne risulta, 49707, non contiene più che i prodotti di 789 per le due prime cifre 63 del quoziente.

Osserviamo di nuovo, che il prodotto di 789 per la seconda cifra 6 del quoziente, è contenuto nelle quattro prime cifre del numero 49707, più le diecine riportate dal primo prodotto parziale. Così per trovare questa cifra 6 è necessario ancora di cercare quante volte le quattro cifre 4970 contengono il divisore 789, ovvero, come di sopra, quante volte 49 contiene il 7. Ma in questo caso 49 contiene 7 volte 7 e non 6 volte. Si potrebbe perciò credere che l'operazione fosse inesatta, se al solito non ci ricordassimo, che 49 contiene non solo il prodotto di 7 per 6, ma che di più contiene ancora la diecine provenienti dai prodotti dell'altre cifre di 789, ed inoltre quelle che provengono dal primo prodotto parziale 2367. Succede perciò sovente che la divisione delle due prime cifre di un dividendo parziale per la prima cifra del divisore, dà un numero più grande di quello che si cerca; e non possiamo riguardare questo processo che come una prova, poichè per esser sicuri che la cifra trovata non sia troppo grande, bisogna moltiplicare il divisore intero per conoscere se il prodotto non supera il dividendo parziale, mentre è necessario non perdere di vista che la vera questione è, nel caso presente, di sapere quante volte 4970 contiene il 789.

Così, moltiplicando 789 per 7, siccome il prodotto 5523 è più grande che il dividendo parziale 4970, ne concluderemo, che il quoziente parziale 7 è troppo grande. Scriveremo perciò solamente 6 al quoziente, quindi moltiplicando 789 per 6, sottrarremo il prodotto 4734 da 4970, ciò che darà per resto 236 accanto del quale abbasseremo l'ultima cifre 7 del divdiendo.

Ora è evidente, siccome abbiamo sottratto successivamente dal dividendo generale i prodotti del divisore per le centinaia e per le diecine del quoziente, che l'ultimo resto 2367 non deve contenere che il prodotto del divisore per la cifra delle unità del quoziente, e che anzi egli deve essere il prodotto medesimo, poichè il dividendo proposto è esattamente divisibile pel divisore. Dunque per trovare questa cifra della unità diremo: in 2367 quante volte 789? ovvero più semplicemente: in 23 quante volte 7? 3 volte. Moltiplicando perciò 789 per 3, e sottraendo il prodotto 2367 dall'ultimo dividendo parziale 2367, avremo zero per resto finale.

77. Ricaveremo dalle operazioni che precedono, la seguente regola generale:

1.° *Si prenderà alla sinistra del dividendo tante cifre quante ne sono necessarie per contenere il divisore.*

2.° *Si cercherà quante volte la parte presa del dividendo generale contiene il divisore. Ciò si eseguisce cercando solamente quante volte la prima cifra a sinistra del divisore è contenuta nella prima cifra del dividendo, o nelle due prime, se la prima non basta. Si scriverà la cifra trovata sotto il divisore.*

3.° *Si moltiplicheranno tutte le cifre del divisore per questo primo quoziente parziale, e scriveremo le cifre del prodotto sotto le cifre del medesimo ordine del dividendo parziale. Si farà la sottrazione, ed accanto al resto si abbasserà la cifra seguente del dividendo generale, che formerà un secondo dividendo parziale.*

4.° *Opereremo sopra il secondo dividendo parziale, come abbiamo fatto sul primo. Così continuerà l'operazione fintantochè si siano consumate tutte le cifre del dividendo generale.*

Illustreremo i casi che possono portare qualche imbarazzo per alcuni esempi.

78. Si abbia da dividere 3730438 per 7364.

3730438	7364	
36820	506	*quoziente*
48438		
44184		
4254 *resto finale*		

Prendendo le cinque ultime cifre 37304 del dividendo, perchè le prime quattro non bastano per contenere il divisore, diremo: in 37 quante volte 7? 5 volte. Si scriverà 5 al quoziente.

Si moltiplicherà 7364 per 5, e formandone il prodotto 36820 si scriverà sotto 37304. Accanto alla differenza 484 di questi due numeri si abbasserà la sesta cifra 3 del dividendo, e si avrà il secondo dividendo parziale 4843.

Siccome questo secondo dividendo parziale è più piccolo del divisore, si scriverà 0 al quoziente, e si abbasserà l'ultima cifra 8 del dividendo.

Si dirà: in 48438 quante volte 7364? o in 48 quante volte 7? 6 volte. Si scriverà 6 al quoziente; quindi si moltiplicherà il divisore per 6, e si scriverà il prodotto 44184 sotto il dividendo parziale. Si eseguirà la sottrazione, ed otterremo un resto finale 4254, dal che si potrà concludere che

$$3730438 = 506 \times 7364 + 4254.$$

79. Si abbia da dividere 8988186 per 596.

8988186	596	*divisore*
596	15080	*quoziente*
3028		
2980		
4818		
4768		
506 *resto finale*		

Si prenderà solamente le tre prime cifre del dividendo, poichè bastano per contenere il divisore, e invece di dire in

896 quante volte contiene 595? si dirà in 8 quante volte 5? 1 volta. Si scriverà 1 al quoziente.

Si moltiplicherà 596 per 1, e si porterà il prodotto 596 sotto 898; si farà la sottrazione, ed accanto al resto 302 si abbasserà la cifra 8 del dividendo. Si seguiterà dicendo: in 30 quante volte 5? 6 volte; ma moltiplicando il divisore per 6 si troverà 3076, che è più grande di 3028; non si scriverà perciò che 5 al quoziente.

Si moltiplicherà il divisore per 5, e si scriverà il prodotto 2980 sotto 3928. Accanto al resto 48 della sottrazione si abbasserà la cifra 1 del dividendo. Ma siccome 481 non può contenere il divisore 596, si scriverà 0 al quoziente, e si abbasserà accanto a 481 la cifra seguente 8 del dividendo. Allora si dirà: in 48 quante volte 5? 9 volte. E siccome si troverà che 9 è troppo grande, si scriverà solamente 8 al quoziente.

Si moltiplicherà il divisore per 8, e dopo avere sottratto il prodotto 4768 da 4818, si otterrà un resto 50, accanto del quale si abbasserà l'ultima cifra 6 del dividendo. Infine si dirà in 506 quante volte 596? Siccome 506 è troppo piccolo, si scriverà 0 al quoziente. Tutte le cifre del dividendo essendo consumate si concluderà, che il resto finale è 506, o che 8988186 contiene 596 volte il 15080 con un resto 406.

80. Si possono abbreviare le moltiplicazioni nel caso che si voglia sapere se la cifra ottenuta dalla divisione delle due prime cifre del dividendo, per la prima cifra del divisore, sia troppo grande. Per esempio nella precedente divisione al terzo dividendo parziale abbiamo: in 48 quante volte 5? 9 volte; ove non abbiamo potuto mettere che 8 al quoziente perchè il divisore moltiplicato per 9 dà 5364, che è più grande del dividendo parziale 4818. Ora, onde evitare questa moltiplicazione, servirebbe di fare la seguente osservazione.

Se 4818 contenesse 9 volte 596, le ultime cifre 48 dovrebbero contenere 9 volte 5, più un resto che si comporrebbe delle diecine provenienti dalla moltiplicazione delle altre cifre del divisore per 9. Sottraendo perciò 9 volte 5 o 45 da 48, il resto 3 dovrebbe rappresentare queste diecine. Ora 318, che resta dopo avere sottratto 45 centinaia da 4818, deve contenere i prodotti delle due prime cifre 96 del divisore per 9, e particolarmente 31 deve contenere il prodotto

della cifra 9 delle diecine per 9; ma questo prodotto essendo 81, è per conseguenza più grande di 31, e ne segue che 9 volte 596 è più grande di 4818. Così senza essere obbligati a moltiplicare intieramente 596 per 9, e solamente con l'aiuto della differenza di 48 a 45 si riconosce che la cifra 9 non è quella che si ricerca.

Adesso per sapere se 8 sia ancora troppo grande, mentre possono presentarsi dei casi in cui la cifra trovata superi la cifra cercata di due unità, si dirà come sopra: 8 volte 5 fanno 40; 40 tolto da 48 dà 8 di resto: unendo 8 alla terza cifra 1 di 4818 si dirà: da 81 tolto 72 prodotto della seconda cifra 9 del divisore per 8, resta 9; quindi unendo a 9 l'ultima cifra 8 del dividendo parziale, si riconoscerà che il quoziente 8 non è troppo grande, poichè l'ultimo numero 98 contiene il prodotto di questo quoziente 8 per l'ultima cifra 6 del divisore.

Il tentativo del numero 8, come quoziente, produrrebbe dunque l'operazione

$$\begin{array}{r|l} 4818 & 596 \\ \cline{2-2} 81 & 8 \\ 98 & \end{array}$$

la quale è molto più pronta della moltiplicazione di 596 per 8. Sarà utile prendere l'abitudine di eseguire senza scrivere alcuna cifra, come nell'esempio citato. La pratica insegna a riconoscere fin dal primo resto se il quoziente è troppo grande.

80. Nel caso in cui il dividendo si componesse di molte cifre, per esser più sicuri di non commettere errori nel corso dell'operazione, terremo il seguente metodo, che per maggior chiarezza lo applicheremo nel descriverlo ai numeri 8636562, e 583.

Si comincia dal formare la tavola dei prodotti del divisore per le unità semplici come segue

583	1
1166	2
1749	3
2332	4
2915	5
3498	6
4081	7
4664	8
5247	9
5830	10

```
8636562 | 583
583     |-----
        | 14814
2806
2332
 4745
 4664
   816
   583
  2332
  2332
     0
```

Scritto il divisore, come sopra, si segni sotto il medesimo il suo prodotto per due. Se questo si somma col divisore avremo evidentemente il suo prodotto per 3 (n.° 29); e se questo pure si sommi col divisore, avremo il prodotto per 4. Così proseguendo avremo tutti i successivi prodotti per ciascuna delle altre cifre semplici fino a 9; al prodotto di questa aggiungeremo il divisore, ed avremo il prodotto del medesimo per 10, il che servirà per riprova, poichè sappiamo (n.° 40) che questo deve trovarsi uguale al divisore con più uno zero alla sua destra tutte le volte che l' operazione è stata ben fatta. A destra dei prodotti, separati questi per mezzo di una linea, avremo cura di segnare respettivamente la cifra semplice dalla quale resultano.

Ciò premesso, la divisione si eseguirà come nei precedenti casi, e dopo aver determinato i respettivi dividendi parziali, cercheremo nelle tavola il numero che più s' avvicina a ciascuno di questi; lo porteremo al di sotto del dividendo parziale; ne faremo, al solito, la sottrazione, avendo cura di segnare nel quoziente la cifra semplice, che si trova a destra del numero che abbiamo preso dalla tavoletta. Ecco il mezzo col quale abbiamo trovato, che il quoziente del numero 8636562 per 583 è 14814.

81. Quando avremo acquistata una sufficiente franchezza nell' eseguire la divisione, si troverà più facile l' eseguire la

moltiplicazione e la sottrazione nel tempo medesimo. Così, ripetendo l'esempio del (n.° 76), dopo aver trovato che la cifra del quoziente è 5, si moltiplicherà 5 per 9, e, per poter sottrarre il prodotto 45 da 2, supporremo aumentato il 2 di 5 diecine, il che darà 52, da cui tolto 45 resterà 7, che si scrive sotto il 2. Quindi si moltiplicherà l'8 per 5; e poichè al dividendo si sono aggiunte 5 diecine, per non alterare il resto bisognerà pure aggiungerle al minutore: dunque poichè 7 per 8 dà 40, se a questo si aggiunge 5 si avrà in tutto 45. Per potere adesso togliere 45 da 4 aggiungo 5 diecine ed ho in tutto 54, da cui tolto 45 resta 9. Proseguo, e fo il prodotto di 5 per 7 a cui aggiungo le 5 diecine che avevo aggiunte al dividendo per non alterare il resto, ed ho in tutto 40, che sottratto da 44 dà 4 di resto: abbasso la cifra 0 del dividendo ed ottengo il dividendo parziale 4970 sul quale proseguo a ragionare come sopra. Questo metodo è simile a quello da noi usato allorquando ci occupammo di dividere un numero di più cifre per un numero di una sola cifra (n.° 74).

82. Quando un' operazione parziale nella divisione è stata ben eseguita, non si può trovare nell' operazione parziale seguente un quoziente maggiore di 9; poichè se si trovasse ancora 10, bisognerebbe che la cifra precedente del quoziente fosse minore di un' unità.

83. Per vedere qual uso debba farsi del resto di una divisione prendiamo un esempio particolare. Sia da dividersi in 7 parti il 33. Secondo le regole già fissate trovo che il quoziente di 33 per 7 è 4 con un resto 5: ma il quoziente 4 non è veramente il quoziente di 33, ma di 28: dunque se vorremo il vero quoziente di 33 bisognerà prendere oltre il quoziente 4 ancora il quoziente di 5 per 7: ora la divisione di 5 per 7 non può effettuarsi per essere il dividendo minore del divisore, in conseguenza dovrà restare accennata e il quoziente totale di 33 diviso per 7 sarà $4 + \frac{5}{7}$.

84. abbiamo veduto che dividere un numero per un altro equivale a fare del 1.° tante parti uguali quante unità sono contenute nel 2.° Così $\frac{33}{7}$, che è una divisione accennata, indica una porzione accennata di 33 diviso in 7 parti, ossia

la 7.ª parte di 33. Per ottenere però la 7.ª parte di 33 potremmo tenere un' altra via e sarebbe la seguente. Si potrebbe dividere ogni unità delle 33 in 7 parti, e prendere una porzione da ogni unità e così si prenderebbero 33 porzioni uguali alla settima parte dell' unità. In tal modo $\frac{33}{7}$ equivarrebbe a dividere l' unità in 7 parti uguali e di queste prenderne 33.

85. È evidente che dividendo un numero per un altro prodotto, oppure per i fattori del prodotto, deve resultarne uno stesso quoziente. Infatti qualunque sia il quoziente ottenuto nel 1.° caso, se si moltiplica pel prodotto deve risultarne il numero primitivo; e nel 2.° caso se si moltiplica il quoziente avuto per i fattori, deve ugualmente risultarne il numero primitivo: ma siccome abbiamo dimostrato (n.° 45) che è indifferente moltiplicare un numero qualunque per un prodotto o per i fattori del prodotto, così potremo ancora moltiplicare il quoziente avuto nel 2.° caso pel prodotto, e dovrà ugualmente risultarne il primo numero: dunque il numero primitivo risulta dal moltiplicare pel prodotto tanto il primo quanto il secondo quoziente: dunque questi due quozienti sono uguali; dunque è indifferente dividere un numero per un prodotto o per i fattori del prodotto. Nel modo medesimo si dimostrerebbe che l' ordine delle successive divisioni dei fattori è indifferente.

86. Si potrà forse domandare perchè la divisione si cominci da sinistra e non da destra, come le altre operazioni. La ragione si è, che il dividendo essendo la somma di tutti i prodotti parziali del divisore per le unità, diecine, ec., del quoziente, tutti questi prodotti si amalgamano e si confondono insieme in modo che non è possibile separarli: mentre col metodo da noi seguito si giunge se non a scoprire il prodotto del divisore per le più alte unità del quoziente, almeno si perviene a determinare in qual parte del dividendo si trovi. Del resto si potrebbe invero eseguire l' operazione cominciando da destra per mezzo di successive sottrazioni, come si è già indicato.

Termineremo le quattro operazioni con alcune osservazioni.

87. *Moltiplicando un numero per un altro si rende il primo*

tante volte maggiore quante unità vi sono nel secondo. Infatti se si moltiplica 24 per 6, il prodotto che si ottiene è 6 volte più grande di 24 perchè risulta dall' addizione di sei numeri uguali a 24.

Ciò premesso, se in una moltiplicazione *si rende uno dei fattori un certo numero di volte più grande, il prodotto diviene altrettante volte più grande.*

Infatti si abbia da moltiplicare 47 per 6, e invece si moltiplichi 47 per 24, che è 4 volte più grande di 6. Siccome, per quel che abbiamo detto di sopra, moltiplicare 47 per 24 equivale a moltiplicare 47 per 6 e il prodotto per 4, ne segue che il prodotto di 47 per 24 è uguale a 4 volte il prodotto di 47 per 6, ossia è 4 volte più grande del prodotto di 47 per 6.

All' opposto *se si rende uno de' fattori un certo numero di volte più piccolo, il prodotto diviene altrettante volte più piccolo.*

Infatti il prodotto di 47 per 6, che è 4 volte più piccolo di 24, essendo 4 volte più piccolo del prodotto di 47 per 24, ne segue, che se si rende uno dei fattori 4 volte più piccolo il prodotto è per questo cangiamento reso 4 volte più piccolo.

Da quanto abbiamo detto di sopra si deduce, che:

Se si rende uno de' fattori un certo numero di volte più grande e l' altro fattore lo stesso numero di volte più piccolo, il prodotto resta lo stesso.

Difatti rendendo uno de' fattori tante volte maggiore, dovrebbe il prodotto per questo cangiamento esser maggiore di un dato numero di volte; e rendendo l' altro fattore altrettante volte minore, dovrebbe ugualmente esser diminuito di uno stesso numero di volte: dunque gli effetti essendo uguali e contrarii vengono a distruggersi.

88. *Dividendo un numero per un altro si rende il primo tante volte più piccolo quante unità vi sono nel secondo numero.*

Infatti se si divide un numero per un altro, per esempio 24 per 6, il quoziente è 6 volte più piccolo di 24 perchè questo quoziente moltiplicato per 6, ossia reso 6 volte più grande, dee riprodurre il 24: dunque se un numero si divide per un altro diviene tante volte più piccolo quante sono le unità del divisore.

Ora *se si renda il dividendo un dato numero di volte più*

grande o più piccolo, cioè se si divide o si moltiplica per un dato numero, il quoziente rimane moltiplicato o diviso per lo stesso numero.

È evidente infatti che se si moltiplica per un dato numero il dividendo, il divisore vi dovrà esser contenuto un numero di volte tanto più grande quanto è il numero per cui si è moltiplicato. Per esempio si abbia 24 da dividersi per 6. Se si moltiplica il 24 per 3, il 6 sarà contenuto nel prodotto 3 volte di più di quello che vi era contenuto in avanti, ossia il quoziente sarà 3 volte maggiore perchè il prodotto di 24 per 3 si compone di tre numeri uguali a 24: ma in ognuno di essi il 6 vi stà tante volte quante vi stava prima; dunque in tutti e tre vi starà 3 volte di più. Viceversa il 24 contiene il 6 tre volte di meno di quello che lo contenga il 72, prodotto di 24 per 3, perchè è tre volte più piccolo. Dunque concludiamo in generale che se si moltiplica o si divide il dividendo, il quoziente sarà moltiplicato o diviso per lo stesso numero.

Se si moltiplica o si divide il divisore per un dato numero, il quoziente rimane diviso o moltiplicato per lo stesso numero.

Riflettendo che il dividendo non è che un prodotto, il divisore del quale e il quoziente ne sono i fattori; se si moltiplica o si divide il divisore, o uno dei fattori per un dato numero; qualora si voglia che il prodotto e il dividendo resti il medesimo, bisognerà che il quoziente, o l'altro fattore sia diviso o moltiplicato per lo stesso numero.

Risulta da tutto ciò, che *moltiplicando o dividendo tanto il dividendo che il divisore di una divisione per un medesimo numero il quoziente rimane lo stesso.*

Infatti siccome si fa subire uno stesso cambiamento al dividendo e al divisore; e siccome questi cambiamenti producono nel quoziente due effetti uguali e contrarii, così vi hà compensazione, e il quoziente non rimane alterato.

PROVE DELLE QUATTRO REGOLE DELL'ARITMETICA

89. L'uomo è spesse volte soggetto ad errare anco in quelle operazioni nelle quali pone una maggiore attenzione ed ac-

cortezza: è dunque utile trovare un mezzo che ci renda certi che in una operazione eseguita non si sia commesso sbaglio veruno. Il primo metodo che si presenta per accertarsi dell'esattezza d'un operazione è quello di rifarla, e se il risultamento che si ottiene combina con quello già ottenuto, avremo probabilità che l'operazione sia ben fatta. L'esperienza però ci fa conoscere, che allorquando in una operazione si è commesso un errore, con la massima facilità, nel rifare la stessa operazione, si torna a cadere nello stesso errore. Dunque è necessario trovare un altro mezzo per il quale si giunga ad avere lo stesso risultamento dell'operazione, o almeno una certa verificazione, ma per diversa via e con diverso ordine.

La prova dell'addizione si può fare coll'eseguire l'addizione da sinistra nel modo che segue.

30786
3566
385
2762
493
37992
2320

Per verificare il risultamento 37992 dell'operazione eseguita, comincio l'addizione da sinistra. La 1.ª colonna a sinistra mi dà 3, e trovando scritto 3 nella somma vedo che questa è esatta. La 2.ª colonna sommata dà 5; e siccome trovo scritto 7 nella somma, è segno che quello che vi è nel 7 al di sopra del 5 è provenuto da quel che si è portato dalla colonna a destra. Per conoscere dunque quello che si è portato sottraggo 5 da 7 e il resto 2 m'indica 2 diecine avute dall'ordine inferiore. Sommo la 3.ª colonna ed ho 26; e siccome trovo scritto 9 nella somma, che colle 2 diecine che si sono portate formano 29, è segno che ciò che vi è nel 29 al di sopra di 26 si è portato dalla colonna delle diecine. Per conoscere quel che si è portato sottraggo 26 da 29 e il resto 3 m'indica 3 diecine avute dall'ordine inferiore. Sommo la 4.ª colonna ed ho 37; e siccome trovo scritto 9 nella somma che colle 3 diecine portate si forma 39, se sottraggo il 37

da 39 avrò le 2 diecine portate dalla colonna delle unità: sommo la colonna delle unità e trovo 22; e siccome nella somma è scritto 2, che colle due diecine portate dà pure 22, concludo che la somma è stata fatta esattamente.

Possiamo dunque dare la seguente regola pratica per la riprova dell'addizione: *dopo aver fatto la somma delle cifre che si trovano nella prima colonna a sinistra si toglie questa somma dalla parte che gli corrisponde nella somma totale: al di sotto si scrive il resto, che colla mente si riduce a diecine dell' ordine inferiore per congiungerle alle unità dello stesso ordine nella somma totale: si fa ugualmente la somma parziale delle cifre della seconda colonna a sinistra, e si toglie dalla parte della somma totale che gli corrisponde: si continua così fino all' ultima colonna, la somma parziale della quale, sottratta che sia, non deve lasciare alcun resto.*

Si potrebbe fare ancora la prova dell'addizione per mezzo della sottrazione. Per esempio dalla somma già ottenuta nel caso precedente si può togliere uno dei numeri sommati e il resto che se ne ottiene deve essere uguale alla somma di tutti gli altri numeri.

90. Per quello che dicemmo nella sottrazione, il resto aggiunto al minutore deve essere uguale al minuendo; dunque se il resto trovato aggiunto al minutore darà il minuendo, questo sarà un segno che la sottrazione è bene eseguita.

Esempio

730014
267865
———
462149
———
730014

91. Dicemmo che nella moltiplicazione l'ordine de' fattori si poteva invertire senza alterare il prodotto; dunque per provare se una moltiplicazione è stata bene eseguita si prenderà per moltiplicando quel fattore che nella moltiplicazione avea fatto da moltiplicatore e viceversa; e se il prodotto risulterà uguale, l'operazione della moltiplicazione sarà stata fatta bene.

La prova della moltiplicazione si potrebbe fare per mezzo

della divisione dietro il principio, che la divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione. Così si dividerà il prodotto per uno dei fattori, e il quoziente dovrà essere l'altro fattore. Si potrebbe pure nella moltiplicazione far la prova dell'esattezza di ciascun prodotto parziale col dividerlo per la cifra dalla quale si è ottenuto, dovendo evidentemente da ciascun divisore risultare il moltiplicando.

92. Abbiamo veduto che se al prodotto del divisore pel quoziente si aggiunge il resto ne deve risultare il dividendo: dunque per vedere se un'operazione di divisione è stata bene eseguita si moltiplicherà il divisore pel quoziente, e se la somma del prodotto col resto sarà uguale al dividendo, saremo assicurati dell'esattezza dell'operazione.

È da avvertirsi che le prove delle operazioni danno una gran probabilità dell'esattezza delle operazioni provate; ma non ne danno la certezza assoluta perchè può sempre accadere, benchè raramente, che un errore dell'operazione venga compensato da un errore uguale e contrario nella prova: come pure non si può subito concludere che un'operazione sia mal fatta quando la prova non combini col risultamento dell'operazione, poichè può esser che l'errore sia nella prova.

CAPITOLO II.

NOZIONI PRELIMINARI SOPRA LE FRAZIONI, POTENZE, RADICI, E SOPRA DIVERSE PROPRIETA' GENERALI DEI NUMERI.

93. Nell'eseguire la divisione abbiamo veduto, che essa genera delle quantità le quali differiscono essenzialmente dai numeri interi formati in principio per mezzo dell'addizione reiterata dell'unità. Abbiamo infatti osservato (n.° 73), che il quoziente esatto della divisione di 65 per 9 non era nè 7 nè 8, ma fra 7 e 8; cioè un numero più grande di 7 e più piccolo di 8. Segue lo stesso in un'infinità di casi. Per esempio la divisione di 3 per 4 non può produrre che un numero fra 0 e 1, ossia più piccolo di uno; quella di 3 per 2 un numero fra 1 e 2; quella di 7 per 3 un numero fra 2 e 3, ec., ec. Questi nuovi numeri, di cui è indispensabile di esaminarne la natura, si chiamano *numeri frazionari*.

94. Per farsi un'idea esatta del *numero frazionario* pro-

dotto, per esempio, dalla divisione di 3 per 4, bisogna considerarlo come la *quarta* parte di 3: ma non si può dividere 3 in quattro parti senza dividere l'unità fondamentale; di modo che diviene necessario immaginare quest' unità, che fin qui abbiamo riguardata come semplice ed indivisibile, decomponibile essa stessa in unità più piccole o in parti componenti l'unità. Per esempio se supponiamo che l'unità contenga quattro parti, cioè sia formata di quattro parti uguali, ciascuna di queste parti sarà il *quarto* dell'unità; e siccome allora *tre unità* saranno equivalenti a 3 volte quattro quarti o a 12 quarti d'unità, la divisione di 3 unità per 4 produrrà il numero frazionario *tre quarti* d'unità, vale a dire, che 3 diviso per 4 è uguale a *tre quarti*. Per la medesima ragione 5 diviso per 6 è uguale a *cinque sesti* dell'unità, perchè in questo caso si concepisce l'unità divisa in sei parti di cui ciascuna è *un sesto*.

La divisione di 3 per 2 ci conduce ugualmente al numero frazionario *tre mezzi*, che si compone egli stesso del numero intiero 1 e del numero frazionario *un mezzo*.

Osservando che tutti i numeri frazionari più grandi dell'unità si compongono di due parti di cui l'una è un numero intiero, e l'altra un numero frazionario più piccolo dell'unità, si riduce tutta la teoria dei numeri frazionari a quelli che sono più piccoli dell'unità. Quest'ultimi si chiamano particolarmente *frazioni* o *rotti*.

95. Per esprimere una frazione sono necessari due numeri: 1.° quello che indica in quante parti l'unità fondamentale si è supposta divisa; 2.° quello che indica quante di queste parti ne contiene la frazione. Questi due numeri si scrivono l'uno sotto l'altro separandoli per mezzo di una linea: così *tre quarti* si scrivono $\frac{3}{4}$; *quattro quinti* si scrivono $\frac{4}{5}$, ec., ec. E qui torna in acconcio di fare osservare che una frazione qualunque come $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, ec. si deve considerare come una divisione accennata solamente, vale a dire una divisione che non può risolversi in numeri intieri, come dicemmo (n.° 83).

Il numero che indica in quante parti l'unità è stata divisa, e che si scrive sempre al di sotto dell'altro, si chiama il *denominatore* della frazione, perchè appunto denomina in quante parti rimane divisa l'unità fondamentale.

Il numero che indica quante parti dell' unità contenga la frazione, si chiama *numeratore*, perchè effettivamente è quello dal quale la frazione deduce il suo valore numerico paragonabile con i valori di tutte le altre frazioni della medesima denominazione.

Per esempio nella frazione $\frac{3}{4}$, che si dice *tre quarti*, 3 è il *numeratore* e 4 il *denominatore*.

Il numeratore e il denominatore si chiamano ancora i *termini* della frazione.

Essendo le frazioni numeri reali, ne segue che esse sono sottoposte alle medesime combinazioni de'numeri interi. Prima però di passare ad esporre le regole per questa specie di numeri, e per facilitarne quanto è possibile l' esecuzione, sarà cosa utile premettere le prime nozioni sopra le potenze, le radici, e sopra alcune proprietà generali dei numeri.

96. La costruzione di un numero per mezzo di più fattori riceve un carattere particolare che lo distingue dalla semplice moltiplicazione allorquando questi fattori sono uguali. Esaminando, per esempio, il prodotto successivo

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1024$$

si riconosce che il prodotto 1024 si è ottenuto col numero 4 cinque volte fattore, vale a dire che egli è interamente determinato dai due numeri 4 e 5. Ora si chiama *potenza* di un numero il suo prodotto per se medesimo, e si chiama particolarmente *seconda potenza* allorchè è due volte fattore; *terza potenza* allorchè egli è tre volte fattore; *quarta potenza* quando egli è quattro volte fattore, e così di seguito.

Per indicare la potenza si scrive alla destra del numero un poco in alto il numero che indica quante volte egli è fattore: questo numero si chiama il *grado* della potenza. Per esempio la *quinta potenza* di 4 si esprime con

$$4^5,$$

e questa notazione stà in luogo del prodotto successivo $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$. Abbiamo dunque ancora

$$4^5 = 1024.$$

97. Questo nuovo modo di costruzione de' numeri ci con-

duce a due nuove operazioni aritmetiche. La prima, che ha per oggetto di trovare le potenze di un numero, si chiama *l'elevazione a potenza;* la seconda, inversa della prima, e il di cui oggetto è quello di trovare il numero che ha prodotto la potenza, si chiama *estrazione di radice.* Per esempio l'operazione necessaria farsi per costruire il numero 1024, o per trovare la quinta potenza di 4, è un' *elevazione a potenza*, nel mentre che l'operazione inversa, che bisognerebbe eseguire sopra il numero 1024 per trovare il numero di cui egli è la quinta potenza, è un' estrazione di *radice.*

98. Per indicare quest' ultima operazione ci serviamo del segno $\sqrt{}$, che significa *radice;* di modo chè $\sqrt[5]{1024}$, significa la *radice quinta* di 1024. L'inverso di $4^5 = 1024$ è dunque $\sqrt[5]{1024} = 4$.

Nell'*elevazione a potenza* il numero fattore si chiama la *base* della potenza; il numero che indica quante volte esso è fattore si chiama l'*esponente;* e il prodotto si chiama la *potenza.* Così in $4^5 = 1024$, 4 è la base, 5 l'esponente, 1024 è la potenza. Nell'operazione inversa le medesime denominazioni sono conservate salvo quella di *base*, che si cangia in *radice;* di modo che nell'esempio di sopra 4 è la base allorchè per mezzo della moltiplicazione reiterata di questo numero formiamo il 1024: egli è la *radice* allorquando dato il 1024 si vuol ritrovare il numero 4 che lo generò.

99. Si dà ancora generalmente il nome di *quadrato* alla seconda potenza di un numero, e quello di *cubo* alla terza. Per esempio $4^2 = 16$, e $4^3 = 64$: 16 si dice il *quadrato* di 4, e 64 il *cubo* del medesimo numero. Queste denominazioni si estendono ancora alle radici ed allora 4 è da una parte la *radice quadrata* di 16, dall'altra la *radice cubica* di 64.

L'esponente è generalmente sottinteso nelle radici seconde o quadrate, e ordinariamente non si scrive nel segno radicale. Così $\sqrt{16} = 4$ è la medesima cosa di $\sqrt[2]{16} = 4$. Il radicale $\sqrt{}$ senza esponente indica sempre una *radice quadrata.*

In seguito torneremo a parlare particolarmente di queste due operazioni, e per ora bastino queste nozioni.

100. Alcuni numeri godono della proprietà di esser divisibili esattamente per altri numeri, e questa proprietà esaminata diligentemente conduce a stabilire delle teorie che

sono di sommo vantaggio per la soluzione di moltissime questioni dell'Aritmetica. Questo è ciò che determineremo nel presente capitolo.

Quando un numero è derivato dalla moltiplicazione di un altro numero, il primo numero dicesi *multiplo* del secondo, e il secondo dicesi *summultiplo* del primo. Per multiplo dunque s'intende *un numero che deriva dalla moltiplicazione di un altro numero;* per summultiplo s'intende *un numero che moltiplicato per un altro numero ne produce un terzo.*

Dalla definizione si vede che un prodotto è multiplo de' suoi fattori perchè deriva dalla moltiplicazione di uno di essi per l'altro; e viceversa i fattori sono summultipli del prodotto perchè moltiplicando uno di essi per l'altro ne risulta il prodotto.

Siccome un multiplo non è che un prodotto del suo summultiplo per un altro numero, è necessario che il summultiplo sia contenuto nel suo multiplo un numero esatto di volte, e precisamente tante quante sono le unità comprese nel numero pel quale si è moltiplicato il summultiplo: dunque il multiplo si può considerare come composto di tanti numeri uguali al summultiplo quante sono le unità del terzo numero; ossia si può concepire decomposto il multiplo in altrettante parti uguali al summultiplo; perciò possiamo concludere che il summultiplo è una parte del multiplo contenuta in esso un numero esatto di volte, onde il summultiplo è stato pure chiamato *parte aliquota* del suo multiplo, intendendosi per *parte aliquota* di una quantità, un'altra quantità qualunque che sia contenuta nella prima un numero esatto di volte.

Così 24 è multiplo di 6 perchè 4 volte 6 fanno 24; reciprocamente 4 e 6 sono *divisori summultipli*, o *parti aliquote* di 24.

Ogni numero intiero, che non ha altri divisori che se medesimo e l'unità, dicesi *numero primo.* L'unità poi divide qualunque numero. Così 2, 3, 5, 7, 11, 13..... sono *numeri primi.* Ma 4, 6, 8, 9, 12 non lo sono, poichè ammettono i divisori 2 e 3.

Due numeri si dicono *primi fra loro* allorchè non hanno altro divisore comune che l'unità: così 4 e 9, 7 e 12 sono

numeri *primi fra loro;* 8 e 12 non sono numeri primi fra loro perchè sono nel medesimo tempo divisibili per 2 e per 4.

Si dicono *numeri pari* tutti quelli che finiscono per 0, 2, 4, 6, 8, e dispari quelli che terminano per 1, 3, 5, 7 e 9.

101. 1.° Principio. *Ogni numero che divide esattamente un altro numero, divide ancora un multiplo qualunque di questo secondo numero.*

Infatti abbiamo veduto (n.° 88) che quando si rendeva il dividendo di una divisione qualunque 3, 4 volte più grande senza alterare il divisore, ancora il quoziente diveniva 3, 4, ec. volte più grande;

Dunque ec.

Per esempio 84 essendo divisibile per 21, e dando per quoziente 4; 3 volte 84 o 252 diviso per 21 darà per quoziente 3 volte 4 o 12. Infatti il 252 si compone di 3 volte 84; ma ciascuna parte contiene il 21 quattro volte; dunque le tre parti riunite insieme devono necessariamente contenerlo 12.

102. 2.° Principio. *Ogni numero decomposto in due parti divisibili ambedue per un secondo numero, è divisibile esso pure per questo secondo numero.*

Infatti il quoziente della divisione del numero totale essendo uguale alla somma de' due quozienti parziali; se questi due quozienti parziali sono intieri, la loro somma, cioè il quoziente totale, sarà intiero.

103. 3.° Principio. *Ogni numero che divide separatamente un tutto decomposto in due parti, ed una delle parti medesime, divide ancora l'altra parte.*

Poichè il quoziente totale è uguale alla somma de' due quozienti parziali; se uno di questi quozienti parziali fosse intero, e l'altro fosse frazionario, ne seguirebbe, che un *numero intero* sarebbe uguale ad un *numero frazionario*, assurdità manifesta.

All'opposto *se un numero divide una delle parti in cui è stato decomposto un tutto senza dividere l'altra parte, questo numero non divide neppure il numero totale; e il resto della divisione del numero totale per questo numero è uguale a quello che dà la seconda parte in cui è stato decomposto per questo medesimo numero.*

Infatti è evidente che se la prima parte in cui è stato decomposto il numero totale fosse divisibile per un dato numero senza che lo fosse la seconda, il numero totale non lo sarebbe nemmeno; poichè altrimenti ne risulterebbe ancora un numero intero uguale ad un numero frazionario. Rimane attualmente da provare che il resto della divisione del numero totale per il numero dato è uguale al resto della divisione della seconda parte in cui è stato decomposto il tutto per questo numero.

Abbiasi perciò il 157, e sia decomposto come segue

$$157 = 150 + 7.$$

Sia 5 il numero che divide la prima parte 150 e che non divide esattamente la seconda parte 7: avremo $150 = 5 \times 30$, e $7 = 5 \times 1 + 2$, poichè 5 in 7 vi è contenuto una volta più un resto 2. Mediante ciò la nostra uguaglianza si cangerà in

$$150 + 7 \quad \text{o} \quad 157 = 5 \times 30 + 5 \times 1 + 2,$$

vale a dire

$$157 = 5\,(30 + 1) + 2$$

(la parentesi indica che il $30 + 1$ deve essere moltiplicato per 5) donde si vede che il 157 diviso per 5 dà per quoziente $30 + 1$, e per resto 2, il quale non è che il resto delle divisione di 7 per 5; e siccome il ragionamento applicato ai numeri 157 e 5 potrà ancora applicarsi a tutti gli altri numeri, così il principio enunciato è vero in tutte le sue parti.

Stabiliti questi principii passiamo a fissare i varii caratteri di divisibilità de' numeri.

104. *Tutti i numeri pari, vale a dire che finiscono per* 0, 2, 4, 6, 8, *sono esattamente divisibili per* 2.

Infatti qualunque sia il numero può decomporsi in due parti, cioè la parte a sinistra delle unità semplici considerata col suo valore relativo, e la cifra delle unità semplici. Ora è evidente che il numero determinato dalla parte a sinistra delle unità semplici deve finire per 0; dunque questo numero è multiplo di 10 (n.° 40); 10 altronde è divisibile per 2, poichè si ha $10 = 2 \times 5$; dunque questa

prima parte è divisibile per 2: ma qualunque delle cifre 2, 4, 6, 8, è divisibile per 2; così (n.° 98) il numero totale è divisibile per 2. Se il numero finisse per 0 non vi sarebbe bisogno della decomposizione, poichè esso medesimo sarebbe multiplo di 10, e per conseguenza divisibile per 2.

Esempio. Sia il numero 47898: abbiamo

$$47898 = 47890 + 8.$$

La prima parte è divisibile per 2 come multipla di 10, e la seconda è divisibile per lo stesso numero perchè 8 è divisibile per 2; dunque anche tutto il numero 47898 è divisibile per 2.

105. *Ogni numero terminato da uno* 0 *ovvero da* 5 *è divisibile per* 5.

Possiamo applicare a questa proposizione gli stessi principii che alla precedente, e mediante la medesima dimostrazione dedurne la verità.

Se l'ultima cifra è diversa da 0 ovvero da 5, il numero non è divisibile per 5, *e il resto della divisione di questo numero per* 5 *è uguale al resto della divisione dell'ultima cifra per* 5 (n.° 99); cioè il resto è la cifra medesima, se questa è minore di 5; e nel caso contrario il resto è l'eccesso di questa cifra sopra 5.

Così 1727 diviso per 5 dà per resto 2, che è uguale al resto della divisione di 7 per 5.

Ugualmente 37879 e 81736 danno respettivamente per resto 4 e 1.

106. *Ogni numero è divisibile per* 4 *o* 25 *se il numero espresso dalle due ultime cifre è esso pure divisibile per* 4 *o per* 25.

Infatti questo numero può decomporsi in due parti: nella parte a sinistra delle diecine considerata col suo valore relativo, e nella collezione delle diecine e unità. (Per esempio 3548 e 27875 sono equivalenti a $3500 + 48$ e a $27800 + 75$). Ora la prima parte essendo terminata da due zeri è multipla di di 100; 100 è divisibile per 4 o 25, poichè $100 = 25 \times 4$; dunque questa prima parte è ancora divisibile per 4 o per 25; ma la seconda parte è per ipotesi divisibile per 4 o per 25; dunque il numero totale è divisibile per 4 o per 25.

Così 3548 è divisibile per 4 perchè 48 è un multiplo di 4: 27875 è divisibile per 25 perchè 75 è un multiplo di 25.

Ma 13758 non è divisibile per 4 e dà per resto 2, vale a dire quello che si ottiene dividendo 58 per 4.

25659 non è divisibile per 25 e dà per resto 9, cioè il resto della divisione di 59 per 25.

107. *Qualunque numero è divisibile per* 8 *o per* 125 *se il numero espresso dalle tre ultime cifre è esso pure divisibile per* 8 *o per* 125.

La dimostrazione è del tutto simile alla precedente, e basterà soltanto di fare osservare che $1000 = 8 \times 125$, sopra di che si fonda la dimostrazione. Questa proprietà però non è molto in uso.

108. *Ogni numero la di cui somma delle cifre considerata col loro valore assoluto è divisibile per* 3 *o per* 9, *è esso medesimo divisibile per* 3 *o per* 9.

Osserviamo prima di tutto che qualunque numero composto dell'unità seguita da uno o più zeri, come 10, 100, 1000, 10000, ec., può decomporsi in $9 + 1$, $99 + 1$, $999 + 1$, $9999 + 1$, ec. e che sottraendo 1 da tutti questi numeri ne risultano dei numeri divisibili per 9, poichè questo risultamento si compone di tante cifre 9 scritte le une in seguito dell'altre quanti zeri vi erano. Ora il valore assoluto di ciascuna cifra è divisibile tanto per 3 quanto per 9; dunque segue lo stesso del suo valore relativo, che è un multiplo del valore assoluto. Così il risultamento è ancora divisibile per 3 o per 9.

Ciò premesso, è evidente che i numeri 10, 100, 1000, 10000, ec. divisi per 3 o per 9, danno 1 di resto. Ora ogni numero, come 40, 200, 3000 ec. espresso da una sola cifra significativa seguita alla destra da un certo numero di zeri, può decomporsi in più numeri espressi dall'unità seguita sulla destra da un certo numero di zeri. Infatti 40 è uguale a $10 + 10 + 10 + 10$: 200 a $100 + 100$: 3000 a $1000 + 1000 + 1000$ e così degli altri. Quindi ne segue che se dividiamo 40 o $10 + 10 + 10 + 10$ per 3 o per 9, il resto sarà 1, più 1, più 1, più 1, o 4.

Se si divide 200 o 100 più 100 per 3 o per 9, il resto sarà 1, più 1 o 2.

In generale se si divide per 3 o per 9 un numero espresso da una sola cifra significativa seguita alla sua destra da uno

o più zeri, il resto della divisione sarà uguale a tante volte 1 quante unità sono contenute nella cifra significativa alla sinistra degli zeri, cioè sarà uguale alla cifra significativa medesima.

Ora un numero qualunque, per esempio 537651, può decomporsi in 500000 + 30000 + 7000 + 600 + 50 + 1, cioè in unità, diecine, centinaia, migliaia, ec., ossia in numeri espressi da una sola cifra significativa seguita da uno o più zeri. Se dividiamo ciascuno di questi numeri per 3 o per 9, ciascuna divisione darà per resto una delle cifre significative del numero proposto. Per esempio la divisione delle migliaia darà per resto la cifra delle migliaia: quella delle centinaia darà per resto la cifra delle centinaia e così dell'altre: talchè nel nostro caso avremo per resto 5 + 3 + 7 + 6 + 5 + 1. Se dunque la somma di tutti questi resti è divisibile per 3 o per 9, è chiaro che tutto il numero sarà divisibile per 3 o per 9; e siccome 5 + 3 + 7 + 6 + 5 + 1 = 27, numero divisibile per 3 o per 9; dunque il numero 537651 è divisibile per 3 o per 9. Donde segue che quando la somma delle cifre significative di un numero dato è divisibile per 3 o per 9, anche tutto il numero è divisibile per 3 o per 9.

Così i numeri 342, 2541, 34215 sono divisibili per 3 perchè la somma delle cifre significative è 9 nel primo numero, 12 nel secondo e 15 nel terzo.

Egualmente 216, 8082, 241839 sono divisibili per 9 perchè la somma delle cifre significative è 9 nel primo, 18 nel secondo e 27 nel terzo numero.

Conviene osservare che ogni numero divisibile per 9 è pure divisibile per 3: ma ogni numero divisibile per 3 non lo è per 9.

109. Ricerchiamo adesso come potremo conoscere se un numero è o non è divisibile per 7.

Prima di tutto osserviamo che dividendo 1, 10, 10^2, 10^3, ec. per 7, non potremo avere che i sei resti 1, 2, 3, 4, 5, 6, i quali solamente vengono in un ordine differente da questo. Essendo sicuri di non poter avere 0 per resto, giacchè 1, 10, 10^2, ec. non sono multipli di 7, segue perciò che dopo sei divisioni al più dobbiamo ricadere sopra uno dei resti ottenuti.

Premesso ciò, il resto della divisione di 10 per 7 è 3; quello di 100, o 10^2 diviso per 7, è $3 \times 3 = 3^2$ o piuttosto $9 - 7 = 2$: egualmente quello di 10^3 è 2×3, o 6; quello di 10^4 è 6×3 o 18, e togliendovi il 7 quante volte possiamo, è $18 - 14 = 4$, ec. Moltiplicando dunque ciascuno resto antecedente per 3, e togliendo il 7, se è possibile, avremo i resti semplici 1, 3, 2, 6, 4, 5 della divisione per 7 de' numeri 1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5; ma arrivati a 10^6 il resto è $5 \times 3 = 15$, e tolto due volte il 7 rimaue 1. Ogni qual volta si trova uno dei resti precedenti, ciò è una conseguenza del calcolo, e siamo sicuri che dividendo per 7, 10^7, 10^8 ec. si riprodurrebbero i medesimi resti e nel medesimo ordine di 10^2, 10^3, ec. I numeri 1, 3, 2, 6, 4, 5, che si riproducono continuamente allorquando si dividono le potenze consecutive del 10 per 7, sono ciò che chiamasi *periodo de' resti*. Se si domandasse il resto delle divisioni di 10^{27}, togliendo i multipli di 6 compresi in 27, giacchè il periodo ha 6 termini, questo sarebbe lo stesso che quello di 10^3, cioè 6.

Proponiamoci adesso di sapere se il numero 285677 è divisibile per 7. Questo numero può decomporsi come segue.

$$285614 = 200000 + 80000 + 5000 + 600 + 10 + 4$$

ovvero

$$285614 = 2 \times 10^5 + 8 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 1 \times 10 + 4$$

I resti di questi numeri, per quello che abbiamo detto di sopra (n.° 108), sono i medesimi di quelli del periodo ripetuti 4, 1, 6, 5, 8, e 2 volte: da ciò si vede che basterà di scrivere in senso inverso le cifre del periodo sotto le cifre del numero dato, come si vede nella seguente pagina; si moltiplicherà quindi ciascuna cifra per quella che è al di sotto: la somma 91 del prodotto darà il medesimo resto che la divisione del numero dato per 7; e siccome il resto di 91 è zero, tanto questa somma quanto il numero proposto sono divisibili per 7.

$$\begin{array}{r} 285614 \\ 546231 \\ \hline 1 \times 4 = 4 \\ 3 \times 1 = 3 \\ 2 \times 6 = 12 \\ 6 \times 5 = 30 \\ 4 \times 8 = 32 \\ 5 \times 2 = 10 \\ \hline \text{Somma } 91 \end{array}$$

Nella pratica (siccome questo processo è un poco lungo, e il tentativo della divisione per 7 del numero proposto è forse più breve) è più comodo di adoprare questo secondo metodo.

Possiamo però ancora semplicizzare il processo proposto mediante le seguenti osservazioni.

$$\begin{array}{lllll} 10^3 = 1000 & = 142 & \times 7 + 6 = 143 & \times 7 - 1: \\ 14^4 = 10000 & = 1428 & \times 7 + 4 = 1429 & \times 7 - 3: \\ 10^6 = 100000 & = 14285 & \times 7 + 5 = 14285 & \times 7 - 2. \end{array}$$

Da ciò vediamo che agli ultimi tre resti 6, 4, 5 del periodo si possono sostituire i primi tre resti 1, 3, 2 ma presi con segno negativo. Mediante ciò il periodo si forma delle sole tre cifre 1, 3, 2, talchè quando avremo moltiplicato la cifra dell' unità, quella delle diecine e quella delle centinaia del numero dato per i resti 1, 3, 2 e fatto la somma di questi prodotti, passeremo a fare lo stesso con le cifre delle migliaia, delle diecine di migliaia, e delle centinaia di migliaia e daremo alla somma di questi prodotti il segno negativo. Ciò premesso, si divideranno i numeri dati in gruppi di tre cifre cominciando dalla destra e andando verso la sinistra; quindi si moltiplicherà la prima cifra a destra di ciascun gruppo per la prima cifra del periodo, cioè per 1; la seconda cifra per 3, e la terza per 2, quindi fatta la somma dei prodotti ottenuti dai gruppi di posto impari, toglieremo da questa somma quella dei prodotti ottenuti dai gruppi di posto pari; e se la differenza che ne risulta sarà 0, ovvero un multiplo di 7, il numero dato sarà divisibile per 7.

Il calcolo si dispone come qui sotto, e la linea si pone sopra i fattori i prodotti dei quali sono sottrattivi.

Sia il numero

$$\begin{array}{ll}
1\,4\,\overline{6\,1\,4}\,2\,8\,5 & \\
3\,1\,\overline{2\,3\,1}\,2\,3\,1 & \\
\hline
1\,.\,5 = 5 & \\
3\,.\,8 = 24 & \\
2\,.\,2 = 4 & 1\,.\,4 = 4 \\
1\,.\,4 = 4 & 3\,.\,1 = 3 \\
3\,.\,1 = 3 & 2\,.\,6 = 12 \\
\overline{40} & \overline{-19}
\end{array}$$

Con questo metodo si trova che la somma dei prodotti dei gruppi di posto impari è 40, e quella dei gruppi di posto pari è 19; la sua differenza è perciò $40 - 19 = 21$; ma 21 è multiplo di 7, dunque anche il numero 14614285 è divisibile per 7.

110. *Qualunque numero è divisibile per* 11 *allorchè la differenza fra la somma delle cifre di posto impari, cominciando da destra, e la somma delle cifre di posto pari è* 0, *o un multiplo di* 11.

Avanti di dimostrare questa proprietà è necessario di osservare:

1.° Che *qualunque potenza di grado pari di* 10 *diminuita di un' unità dà un risultamento divisibile per* 11.

Infatti $10^2 - 1 = 100 - 1 = 99$. $10^4 - 1 = 10000 - 1 = 9999$, ec., vale a dire che questi risultamenti si compongono di una serie di 2, di 4, di 6, di 8 *nove;* ora ciascun gruppo di due cifre considerato solo forma 99 o 9×11, ed è per conseguenza divisibile per 11; dunque il valore relativo di ciascun gruppo, che è un multiplo del valore assoluto, è esso stesso divisibile per 11.

2.° *Che qualunque potenza di un grado impari di* 10 *aumentata di un' unità dà un risultamento divisibile per* 11.

Infatti una potenza di un grado impari, per esempio 10^5, può decomporsi (n.° 96) in $10^4 \times 10$; ovvero aggiungendo e sottraendo 10, il che non altera punto la nostra potenza, avremo

$$10^5 = 10^4 \times 10 + 10 - 10;$$

e mettendo fuori di una parentesi il 10 tanto dal primo che dal terzo termine del secondo membro della nostra uguaglianza, verrà

$$10^5 = 10\,(10^4 - 1) + 10:$$

aggiungendo 1 ad ambedue i membri avremo finalmente

$$10^5 + 1 = 10\,(10^4 - 1) + 10$$

risultamento evidentemente divisibile per 11 perchè $10^4 - 1$ lo è per la prima osservazione: 11 è d'altronde divisibile per se medesimo; dunque $10^5 + 1$ è ancora divisibile per 11. Si vede chiaramente che quello che abbiamo detto per 10^5 è applicabile a qualunque altra potenza dispari del 10; dunque tutte le potenze di un grado impari di 10 aumentate di un' unità sono divisibili per 11.

Premesso ciò, sia il numero 17355712; avremo

$$17355712 = 10000000 + 7000000 + 300000 + 50000 + 5000 + 700 + 10 + 2$$

il quale potrà mettersi ancora sotto la seguente forma, cioè

$$17355712 = 1 \,.\, 10^7 + 7 \,.\, 10^6 + 3 \,.\, 10^5 + 5 \,.\, 10^4 + 5 \,.\, 10^3 + 7 \,.\, 10^2 + 1 \,.\, 10 + 2;$$

e rovesciando l'ordine

$$17355712 = 2 + 1 \,.\, 10 + 7 \,.\, 10^2 + 5 \,.\, 10^3 + 5 \,.\, 10^4 + 3 \,.\, 10^5 + 7 \,.\, 10^6 + 1 \,.\, 10^7$$

uguaglianza che potremo cangiare nella seguente aggiungendo e togliendo le cifre significative cominciando dalla seconda

$$17355712 = \left\{ \begin{array}{lllll} & + 1 \,.\, 10 + 1 + \,.\, 10^2 - 7 + 5 \,.\, 10^3 + 5 \\ + 2 & \quad - 1 & \quad + 7 & \quad - 5 \end{array} \right.$$

$$+ 5 \,.\, 10^4 - 5 + 3 \,.\, 10^5 + 3 + 7 \,.\, 10^6 - 7 + 1 \,.\, 10^7 + 1$$
$$+ 5 \qquad - 3 \qquad + 7 \qquad - 1$$

e levando fuori di parentesi le cifre comuni della prima linea orizzontale verrà

$$17355712 = \left\{ \begin{array}{l} \quad\quad\quad + (10+1)\,1 + (10^2-1)\,7 + (10^3+1)\,5 \\ +2 \quad\quad\quad\quad -1 \quad\quad\quad +7 \quad\quad\quad -5 \end{array} \right.$$

$$+ (10^4-1)\,5 + (10^5+1)\,3 + (10^6-1)\,7 + (10^7+1)\,1$$
$$+5 \quad\quad\quad -3 \quad\quad\quad +7 \quad\quad\quad -1$$

Ora, per le due precedenti osservazioni, la prima linea si compone di una serie di numeri essenzialmente divisibili per 11: dunque se la seconda parte, che non è altra cosa *che la differenza fra la somma* $2+7+5+7=21$ *delle cifre di posto impari*, e la somma $1+5+3+1=10$ *delle cifre di posto pari*, è divisibile per 11, come l'abbiamo supposto; il numero totale 17355712 è ancora divisibile per 11.

Qnesta dimostrazione è applicabile a qualunque altro numero, e perciò l'enunciato della nostra proposizione è vero in tutte le sue parti.

111. Si potrebbe ugualmente conoscere quando un numero è divisibile per i numeri primi 13, 17, 19, 23... ma le regole necessarie a seguirsi sono molto lunghe in pratica, motivo per cui abbiamo creduto utile di formare alla fine del presente volume una tavola di numeri da 1 fino a 50000, che ammettono dei divisori maggiori di 11, vale a dire, che cominciano dai numeri 13, 17, 19... ec.

Nella prima colonna intitolata *numeri*, vi sono quelli che ammettono de' divisori; nella seconda colonna intitolata *divisori*, vi sono appunto i più piccoli divisori primi de' numeri dati.

Stabiliti i caratteri dai quali si riconosce la divisibilità dei numeri, passiamo adesso alla ricerca di tutti i divisori di un numero tanto semplici quanto composti.

112. La prima operazione da farsi è quella di decomporre un numero nei suoi fattori primi, ossia nei suoi elementi. Per eseguire ciò, se il numero dato è pari, si comincia dal dividerlo tante volte per 2, quante sarà possibile, e si pone altrettante volte il 2 come elemento: giunti con questo sistema ad un quoziente impari, qualora la somma delle cifre del medesimo sia un multiplo di 3, divideremo questo quoziente per 3, e lo ripeteremo quante volte occorrerà, e altrettante porremo il 3 come elemento: faremo lo stesso per i numeri 5, 7 e 11; dopo di che, per trovare gli altri ele-

menti superiori all' 11, come 13, 17, 19, ec., qualora ve ne sieno, avremo ricorso alla tavola citata (n.° 111).

Sia proposto il numero 73153080. Questo numero essendo pari, comincio a dividerlo per 2 quante volte si può, cioè tre volte; dopo di che ottengo il quoziente 9144135. Siccome questo ha la somma delle cifre multipla di 3, così lo divido per 3; ripeto questa divisione quante volte occorre, cioè 2, ed ho così il quoziente 1016015, numero, che diviso per 5, dà per quoziente 203203, e che riconoscesi esser divisibile per 7, giacchè la somma dei prodotti per le cifre del periodo del gruppo di posto impari (n.° 109), è uguale a quella del gruppo di posto pari: dividendolo per 7 due volte ottengo 4147, quoziente divisibile per 11, attesochè la somma delle cifre di posto impari è uguale alla somma delle cifre di posto pari (n.° 110). Eseguita la divisione si ha il quoziente 377. Per conoscere se questo quoziente ammetta altri divisori, o se sia numero primo, si ricorre alla solita tavola. Trovando però che il 377 ha per divisore 13, lo divido ed ottengo finalmente il quoziente 29, il quale essendo numero primo, prova che l' operazione è terminata, e che gli elementi del numero 73153080 sono

2, 2, 2, 3, 3, 5, 7, 7, 11, 13, 29

Ed infatti

$$2\times2\times2\times3\times3\times5\times7\times7\times11\times13\times29=73153080.$$

Nella pratica si usa di operare come qui sotto

	1
73153080	2
36576540	2
18288270	2
9144135	3
3048045	3
1016015	5
203203	7
29029	7
4147	11
377	13
29	29

Si trova ugualmente che $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$, e $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$

	1		1
360	2	210	2
180	2	105	3
90	2	35	5
45	3	7	7
15	3		
5	5		

Osserveremo che la tavola dei numeri impari, che ammettano dei divisori, va fino a 50000; e quantunque per gli usi ordinari della società sia sufficiente; pure potrebbe incontrarsi un numero superiore ai limiti di questa tavola, e che non potesse, con i mezzi insegnati, riconoscersi se avesse dei divisori. In questo caso non vi è altro metodo che quello di tentarne la divisione per ciascun numero primo superiore al numero 11. Ma si deve osservare che questi tentativi inutili di divisione non debbono essere spinti che fino alla radice quadrata del numero proposto. Infatti, essendo questo numero il prodotto della sua radice quadrata per se stessa; e non potendo far crescere uno dei fattori senza che l'altro diminuisca, perchè il prodotto rimanga il medesimo (n.° 87), si vede, che se il numero dato ha uno dei suoi fattori maggiore della radice, l'altro deve esser minore; dimodochè un numero non può essere divisibile per un numero che superi la sua radice quadrata, quando non lo sia per un altro numero minore di questa radice. Dunque possiamo concludere che in questo caso non vi è un divisore che possa superare questa radice.

113. Avuti così gli elementi cercheremo tutti i divisori di un numero come segue.

Abbiamo veduto che $210 = 2 . 3 . 5 . 7$. Da ciò si fa manifesto che

$$6 = 2 . 3,\ 10 = 2 . 5,\ 14 = 2 . 7,\ 15 = 3 . 5,$$
$$21 = 3 . 7,\ 35 = 5 . 7$$

$$30 = 2 . 3 . 5,\ 70 = 2 . 5 . 7,\ 105 = 3 . 5 . 7,$$
$$210 = 2 . 3 . 5 . 7$$

sarebbero pure divisori del numero dato, perchè nascono dal prodotto dei fattori primi 2, 3, 5, 7 in cui è decomposto il numero 210, presi due a due, tre a tre, e quattro a quattro. Dunque, per ottenere tutti i divisori di un numero, dovremo fare tutti i prodotti dei fattori di questo numero, prendendoli 2 a 2, 3 a 3, 4 a 4, ec. operazione che eseguiremo nella seguente maniera.

Per avere, a cagione d'esempio, tutti i divisori di 360, si moltiplicheranno i suoi divisori primi già trovati (n.° 112) in tutte le maniere possibili tra loro; e per non tralasciarne alcuno, e per non ripetere il medesimo più volte, faremo così: si moltiplicherà il primo divisore pel secondo, ed il prodotto risultante si scriverà alla destra del secondo divisore: quindi si moltiplicheranno pel terzo divisore tutti i precedenti, e si scriveranno tutti i prodotti resultanti in una linea alla destra del terzo divisore. Quindi si moltiplicheranno pel quarto divisore tutti i precedenti, scrivendone i prodotti alla destra del quarto divisore, e così continueremo a moltiplicare per ogni successivo divisore primo tutti i precedenti, ed a scrivere tutti i prodotti sempre alla destra di quel divisore primo per cui si moltiplica, avvertendo di non scrivere di nuovo quei prodotti che possono risultare uguali ad uno de' precedenti, e di separare con virgole tutti i prodotti. Avremo così tutti i divisori di 360. Ecco qui scritto di nuovo 360 con tutte le suddette operazioni già eseguite, e con tutti i suoi divisori alla destra.

	1	
360	2	
180	2	4
90	2	8
45	3	6, 12, 24
15	3	9 . 18 . 36 . 72
5	5	10 . 15 . 20 . 30 . 40 . 45 . 60 . 90, 120, 180, 360.
1		

Ecco un altro esempio per esercizio.

	1	
1155	3	
385	5	15
77	7	21, 35, 105
11	11	33 . 55 . 77 . 165 . 231, 385, 1155.

Da quanto abbiamo detto si vede ancora che

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5, \text{ e } 1155 = 3 \times 5 \times 7 \times 11.$$

114. Allorqnando abbiamo operato la decomposizione di un dato numero nei suoi elementi, possiamo con facilità ottenere il numero totale dei divisori, che contiene il numero proposto, senza essere obbligati ad eseguire l'operazione.

Riprendiamo il numero $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ e consideriamo i primi divisori

$$1, 2, 2^2, 2^3,$$

il di cui numero è espresso da $3 + 1$.

Moltiplicando questi divisori snccessivamente per i due termini $3, 3^2$, si formano dne nuove linee di divisori di $3 + 1$ termini o $(3 + 1) \times 2$, divisori ai qnali bisogna aggiungere i primi $3 + 1$ divisori: ciò dà $(3 + 1)\, 2 + (3 + 1)$, ovvero levando fuori il $3 + 1$ comune ai due termini

$$(3 + 1)\,(2 + 1).$$

Moltiplicando finalmente tutti i divisori ottenuti per 1, si ha una linea di divisori, il cni numero è rappresentato per

$$(3 + 1)\,(2 + 1) \times 1$$

al quale bisognerà aggiungere il numero $(3 + 1)\,(2 + 1)$ dei divisori formati precedentemente.

Così il numero totale dei divisori del numero 360 è

$$(3 + 1)\,(2 + 1)\,1 + (3 + 1)\,(2 + 1),$$

o

$$(3 + 1)\,(2 + 1)\,(1 + 1)$$

levando fuori il $(3 + 1)\,(2 + 1)$ comune ai due termini.

Possiamo però stabilire questa regola: *si aumenta di un'unità ciascuno degli esponenti dei differenti fattori primi che en-*

trano nel numero dato; quindi si moltiplicano fra loro questi esponenti così aumentati di un'unità; il prodotto esprime il numero totale dei divisori del numero dato, compresavi l'unità e il numero stesso.

Nell' esempio del numero dato 360, i divisori saranno

$$(3+1)(2+1)(1+1)=4\times3\times2 \text{ o } 24.$$

115. Dall' essere $360=2.2.2.3.3.5$, e $210=2.3.5.7$, vediamo che i fattori semplici comuni al 360 e al 210 sono 2, 3, 5. I divisori comuni ai medesimi saranno quelli che risulteranno dal combinare insieme 2 a 2, e 3 a 3 gli elementi 2, 3, 5, cioè 6, 10, 15, 30. Da ciò deducesi che il minimo fattore, che possa dividere i due numeri 360 e 210, è il 2, ed il massimo è 30; 30 è dunque il numero più grande che possa dividere esattamente 360, e 210, ovvero è il loro *massimo comun divisore.*

Da ciò si vede, che *il massimo comun divisore di due numeri non è che il prodotto di tutti i fattori primi comune a questi numeri.*

Il metodo dunque per trovare il massimo comun divisore di due numeri dati si è quello di decomporli nei suoi *elementi o fattori primi*, e di fare il prodotto di quelli che si trovano comuni ai due numeri. Ma vi è un altro metodo che in diversi casi riesce più semplice, ed in generale più sicuro.

116. Proponiamoci di trovare il *massimo comun divisore* dei due numeri 420 e 156.

Prima di tutto è evidente che il massimo comun divisore dei due numeri 420 e 156 non può eccedere il più piccolo numero 156: e siccome 156 divide se medesimo, così, se esso dividesse il 420, sarà il massimo comun divisore cercato.

Tentando la divisione di 420 per 156 si ottiene un quoziente 2 ed un resto 108; dunque 156 non è il massimo comun divisore cercato. Dico adesso che il massimo comun divisore dei due numeri 420 e 156 *è lo stesso di quello che esiste fra il più piccolo numero* 156 *e il resto* 108 *della divisione.*

Infatti si sa dalla divisione (n.° 73) che

$$420=156\times2+108:$$

ora il massimo comun divisore cercato dovendo dividere 420 e

una delle sue parti 156 × 2, deve dividere ancora (n.° 103) l'altra parte 108; dalla quale osservazione possiamo di già concludere che il massimo comun divisore di 420 e 156 non esser maggiore di 108, e che esso è eguale a quello che compete a 156 e 108.

Ora 156 diviso per 108 dà un quoziente 1 ed un resto 48; dunque 108 non è il massimo comun divisore cercato. Con un ragionamento simile a quello che abbiamo fatto sopra, proveremo che il massimo comun divisore a 156 e 108 è lo stesso di quello che esiste fra il primo resto 108 e il secondo resto 48.

Ragionando adesso come sopra, e dividendo 108 per 48 si ottiene un quoziente 2 ed un resto 12; dunque 48 non è il massimo comun divisore cercato. Ma siccome questo massimo comun divisore è lo stesso di quello che compete ai numeri 48 e 12: e siccome dividendo 48 per 12 si trova un quoziente esatto 4; così 12 è il massimo comun divisore di 48, ed è pure fra 48 e 108, fra 108 e 156, fra 156 e 420: dunque è il medesimo comun divisore cercato.

Nella pratica l'operazione si dispone in una delle due seguenti maniere. La seconda è preferibile per la sua semplicità

	2	1	2	4
420	156	108	48	12
108	48	12	0	

420	
156	2
108	1
48	2
12	4
0	

Dopo aver diviso 420 per 156, che dà per quoziente 2 (che si pone al di sopra o a destra del divisore) e per resto 108, si scrive questo resto alla destra o sotto al più piccolo numero 156, e si divide 156 per 108, e si ottiene un nuovo quoziente 1 che si pone al di sopra o a destra del divisore 108, e un resto 48 che scrivesi alla destra o sotto il 108, e così di seguito.

È pertanto evidente, che per avere il massimo comun divisore di due numeri, *si divide il più grande pel più pic-*

colo; quindi il divisore pel resto, continuando così fintanto che si trovi un resto che entri esattamente nel resto antecedente, e rendendo in questa guisa il divisore dividendo, e il resto divisore. È chiaro che l'ultimo divisore sarà il massimo comun divisore cercato.

Ecco due nuove applicazioni di questo metodo.

7794		8739	
1134	6	966	9
990	1	45	21
144	6	21	2
126	1	3	7
18	7	0	
0			

117. Se l'ultimo divisore si trova uguale all'unità, ciò indica che i due numeri proposti sono primi fra loro (n.° 100) poichè essi non hanno altro divisore comune che l'unità.

Esempi

873		637		897	
239	3	81	7	107	8
156	1	70	1	41	2
83	1	11	6	25	1
73	1	4	2	16	1
10	7	3	1	9	1
3	3	1	3	7	1
1	3	0		2	3
0				1	2
				0	

118. In quest'operazione è da osservarsi la seguente particolarità.

Quando nel corso dell'operazione si ottiene per resto un numero primo (n.° 100), e che questo resto non divide il resto precedente, possiamo tralasciare di proseguire l'operazione, e concludere che i due numeri dati son primi fra loro. Infatti, nella dimostrazione del processo abbiamo veduto, che il massimo comun divisore di due numeri divide necessariamente il resto di ciascuna divisione. Così allorquando si trova

un *numero primo* per resto, se questo divide il resto precedente, egli è allora il massimo comun divisore cercato: se non lo divide, in tal caso nè questo numero, nè alcun altro, eccetto l'unità, può essere comun divisore ai due numeri.

119. Supponiamo adesso che si voglia ottenere il massimo comun divisore fra i quattro numeri 210, 156, 96, 72. Si comincerà dal cercare quello di 210 e 150, e troveremo che questo è 30; il numero che si cerca è perciò evidentemente un fattore di 30; quindi si troverà il massimo comun divisore di 30 e 96 che è 6; finalmente quello di 6 e 72: e siccome 6 entra esattamente in 72, così i quattro numeri proposti non hanno altri divisori comuni che i numeri 1, 2, 3, 6. Questo metodo si può applicare a quanti numeri vogliamo.

120. Dati più numeri, come 6, 8, 12, 16, 24 e 36 *trovare il più piccolo numero divisibile per ciascuno.*

Ecco la regola, che bisogna seguire, per ottenere questo numero: *decomporre i numeri dati nei loro elementi o fattori primi* secondo la regola data (n.° 112); *formare quindi il prodotto di tutti questi fattori primi elevati respettivamente alla più alta delle potenze, alle quali questi fattori si trovano elevati nei differenti numeri dati.* Il prodotto così formato è il *numero domandato.*

Prima di tutto, questo numero è *multiplo* di ciascun numero dato, poichè contiene tutti i fattori primi ad una potenza almeno uguale a quella, che entra in questo numero; inoltre esso è *il più piccolo multiplo;* mentre per contenere esattamente un numero qualunque bisogna che esso contenga ciascun fattore primo ad una potenza almeno uguale a quella, che entra in questo denominatore.

Premesso ciò, i fattori primi di 6, 8, 12, 16, 24 e 36 sono come segue

$$6 = 2 . 3,\ 8 = 2^3,\ 12 = 2^2 . 3,\ 16 = 2^4,$$
$$24 = 2^3 . 3,\ 36 = 2^2 . 3^2.$$

I fattori primi, che entrano in tutti questi numeri, sono il 2 e il 3, e la più alta potenza, a cui questi fattori si troviuo elevati, è la quarta e la seconda: così

$$2^4 \times 3^2 = 144$$

è il prodotto domandato, ed è il più piccolo multiplo che contenga tutti i numeri dati.

Siano ancora i sei numeri 60, 28, 240, 225, 490 e 720 decomposti nei loro fattori primi. Questi equivalgono a

$$2^2 . 3 . 5,\ 2^2 . 7,\ 2^4 . 3 . 5,\ 3^2 . 5^2,\ 2 . 5 . 7^2,\ 2^4 . 3^2 . 5$$

I soli fattori primi, che entrano in questi denominatori, sono 2, 3, 5 e 7, e le più alte potenze, alle quali questi fattori primi si trovano elevati, sono 2^4, 3^2, 5^2, 7^2. Facendo il prodotto di queste più alte potenze si trova 176400 per il più piccolo multiplo di tutti questi numeri.

Infatti, dividendo 176400 per ciascuno dei numeri dati, si trovano i quozienti esatti

2940, 6300, 735, 784, 360, e 245.

Prima di terminare il presente capitolo non possiamo dispensarci dal far conoscere un mezzo semplice e comodissimo per verificare la moltiplicazione e la divisione dei numeri interi, ossia la *prova del* 9.

Per eseguir ciò con maggior facilità, comincerò dal provare

121. *Che il resto della divisione di un prodotto per un numero qualunque è uguale al prodotto de' resti dei due fattori.*

Infatti, indichiamo questi due fattori con i numeri 1517 e 76. Dividendo questi due fattori per 9, si otterranno i quozienti 169 e 8, ed i resti 5 e 4; donde avremo (n.° 73)

$$1517 = 168 \times 9 + 5$$
$$76 = 8 \times 9 + 4.$$

Moltiplicando queste due uguaglianze membro per membro si ottiene

$$1517 \times 76 = (168 . 9 + 5) \times (8 . 9 + 4),$$

uguaglianza che potremo mettere ancora sotto la seguente forma

$$1517 \times 76,\ \text{o}\ 115292 = 9^2 . 168 . 8 + 9 . 5 . 8 + 9 . 168 . 4 + 4 . 5.$$

Ora i primi tre termini del secondo membro di questa nuova uguaglianza sono multipli di 9; dunque (n.° 103) il

resto della divisione del prodotto 1517 $\times$ 76 diviso per 9, dev'essere uguale al resto che dà il prodotto 4 $\times$ 5, diviso per 9, ciò che bisognava dimostrare.

Se uno de' fattori della moltiplicazione è divisibile per 9, il prodotto deve esserlo ugualmente; allora uno dei resti è nullo. Segue lo stesso se il prodotto è un multiplo di 9.

Premesso ciò, per eseguir in pratica la riprova del 9 cominceremo dal sommare separatamente tutte le cifre dell'uno e dell'altro fattore, e finalmente quelle del prodotto, in modo però, che tutte le volte che nel sommare si giunge ad un numero maggiore di 9, si rigetti il 9 e si ritenga solo l'eccesso per continuare l'operazione. Avremo così tre resti finali, che saranno numeri semplici e minori di 9. Si moltiplicheranno i primi due, cioè quelli che provengono dai due fattori, e si sommeranno le cifre del loro prodotto. Se questa somma uguaglierà il terzo resto, quello cioè che proviene dal dato prodotto, o se non ne differirà che di 9 unità, la moltiplicazione potrà supporsi bene eseguita.

Un esempio renderà più chiaro il ragionamento.

Siano da moltiplicarsi i due numeri 6371 e 326. Eseguita la moltiplicazione per mezzo del solito processo, si fa la somma delle cifre del moltiplicando, rigettando il 9.

```
   6371
    326
  ------
  38226
 12742
19113
 -------
2076946
```

8	2
7	7

6 e 3 fanno 9: da 9 tolto 9 rimane 0. 0 e 7 fa 7, e 1 fa 8. 8 dunque è il resto della divisione del moltiplicando per 9 (n.° 103), e si scrive a parte, come qui sopra.

Si opera nella medesima maniera sopra del moltiplicatore, che dà per resto 2, che si scrive alla destra dell'8, come qui sopra.

Si moltiplica 8 per 2 = 16 e si dice: 1 e 6 fanno 7, numero che si pone sotto l'8. Finalmente si opera sul pro-

dotto totale, come sopra i due fattori, che dà il nuovo resto 7, che deve essere uguale al precedente, affinchè l'operazione sia esatta.

Quanto alla prova della divisione, possono succedere due casi; o, effettuando la divisione secondo il processo conosciuto, non si ottiene resto, ovvero se ne ottiene uno.

1.° Se non vi è resto, il dividendo si può considerare come il prodotto esatto del divisore pel quoziente ottenuto; ed in questo caso possiamo applicare la regola precedente, riguardando il divisore ed il quoziente come i due fattori di una moltiplicazione, e il dividendo come il prodotto.

2.° Se si ottiene un resto, cosa che facilmente succede, si comincia dal sottrarre questo resto dal dividendo totale; il risultamento di questa sottrazione deve allora essere il *prodotto* esatto del *divisore* pel *quoziente*, e si opera sopra questi tre ultimi numeri, come abbiamo detto sopra. In questo secondo caso invece di fare la sottrazione del resto dal dividendo dato, dopo aver moltiplicati fra loro i resti del divisore e del quoziente, si porta mentalmente il prodotto o alla sinistra o alla destra del resto finale della divisione. Il resto che risulta dal numero così composto dovrà evidentemente uguagliare quello del dividendo. Così nell'esempio del (n.° 78) il resto del divisore 7364 è 2; del quoziente 506 è ugualmente 2, il loro prodotto 4, che unito al resto finale 4254 dà 44254, donde si ha il resto 1, come dal dividendo 3730438.

Tutte le volte che usiamo la riprova del 9, e che il resto trovato nel prodotto totale non è uguale al terzo resto, possiamo concludere, che la moltiplicazione non è stata eseguita esattamente: ma se il terzo resto è uguale al resto del prodotto, è presumibile che l'operazione sia stata ben fatta; il che però non si potrebbe con certezza affermare per le seguenti ragioni.

1.° Perchè tanto nel prodotto totale quanto nei prodotti parziali potrebbero essere stati scritti uno o più zeri invece di 9, e dalla natura della prova non ci potremmo accorgere dell'errore.

2.° L'istessa ragione milita quando o l'una o l'altra di queste cifre sia stata aggiunta o soppressa.

3.° Quando siansi trasportate due o più cifre:

4.° Quando gli errori commessi in una parte del prodotto sieno compensati in altri commessi in senso opposto nell'altro prodotto.

Infatti è evidente, che in qualunque di questi casi si ottiene la medesima somma delle cifre, ossia, toltone il 9, abbiamo il medesimo risultamento.

Da ciò deducesi che questa prova, per quanto comodissima, nella pratica non è rigorosa, e non dobbiamo riguardarla che come una semiprova, della quale ci serviamo solamente allorquando siamo pressati dal tempo.

CAPITOLO III.

DELLE FRAZIONI.

122. Abbiamo dato (n.° 93, 94, e 96) l'idea di ciò che significava una frazione, ed abbiamo veduto che per formare una frazione sono sempre necessari due termini, il *denominatore* e il *numeratore*. Il denominatore indica *in quante parti uguali l'unità è divisa*, e il numeratore *quante di queste parti prendiamo*.

Abbiamo ugualmente veduto (n.° 95) che una frazione come $\frac{7}{8}$ è equivalente all'ottava parte di un *tutto* espresso dal 7, vale a dire, *che una frazione può ancora considerarsi come il quoziente del suo numeratore diviso pel suo denominatore*, di modo che *sette volte l'ottavo* dell'unità o sette ottavi, è l'*ottava* parte del *sette*, e *sette diviso per otto* sono espressioni identiche.

La nomenclatura composta per le frazioni, la quale corrisponde alla maniera di concepirle e rappresentarle, è la seguente.

Quelle che risultano dalla divisione dell'unità in 2 parti uguali si chiamano *mezzi*

in 3 parti ..... *terzi*
in 4 parti ..... *quarti*
in 5 parti ..... *quinti*
in 6 parti ..... *sesti*

in 7 parti ..... *settimi*
in 8 parti ..... *ottavi*
in 9 parti ..... *noni*
in 10 parti ..... *decimi*
in 11 parti ..... *undicesimi*

e così di seguito, aggiungendo la desinenza *esimi* al numero che esprime quante parti si concepiscono fatte dell'unità.

123. Le *frazioni* hanno ancora il nome di *rotto*.

Un rotto è *proprio*, *improprio* o *apparente*, secondo che il numeratore è minore, maggiore o multiplo del denominatore. Così $\frac{3}{4}$ sono rotti propri: $\frac{13}{8}$, $\frac{27}{11}$ impropri; $\frac{25}{5}$, $\frac{36}{12}$ apparenti. Il rotto proprio è sempre più piccolo dell'unità; l'improprio contiene l'unità una o più volte con avanzo; l'apparente contiene una o più volte l'unità. I rotti *impropri* e *apparenti* hanno ancora la denominazione di numeri frazionarii.

124. Può in un'infinità di casi essere utile aver degli interi o degli interi uniti ad una frazione sotto forma frazionaria. In questo caso, siccome l'unità è evidentemente uguale a $\frac{3}{3}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{7}{7}$ ec., ridurremo gli interi sotto forma frazionaria moltiplicando questi pel numero che vogliamo che sia denominatore del numero frazionario risultante. Così volendo ridurre 13 a quinti, moltiplicheremo il 13 per 5, e daremo a questo prodotto per denominatore il 5, il che dà $\frac{65}{5}$. Ugualmente per ridurre un intero unito ad una frazione a numero frazionario, si moltiplicherà l'intiero pel denominatore della frazione, e si aggiungerà a questo prodotto il numeratore della frazione medesima: così $7, \frac{5}{8} = \frac{61}{8}$.

Da ciò si vede evidentemente come dobbiamo fare ad estrarre gl'interi da un numero frazionario senza che occorra darne veruna spiegazione.

125. Dalle definizioni che abbiamo date del numeratoro e del denominatore resultano le seguenti conseguenze.

1.ª *Se si moltiplica o si divide il numeratore di una frazione*

per un numero qualunque senza alterarne il denominatore, *la nuova frazione sarà questo numero di volte più grande o più piccola della prima.*

Infatti, quando si moltiplica il numeratore per 2, 3, 4 ec. è chiaro che si prendono il doppio, il triplo, il quadruplo... delle parti. E siccome le parti in cui si è divisa l'unità sono le medesime, così la frazione è più grande 2, 3, 4... volte. Si abbia per esempio la frazione $\frac{8}{35}$. È evidente che $\frac{16}{35}$, $\frac{24}{35}$, $\frac{32}{35}$ ec. son frazioni 2, 3, 4,.. volte maggiori delle prime. Al contrario, dividendo il numeratore per 2, 3, 4... si prendono delle parti che sono 2, 3, 4... volte più piccole; dunque la proposizione è vera in tutte le sue parti. Così $\frac{4}{35}$, $\frac{2}{35}$, sono frazioni 2, e 4 volte più piccole di $\frac{8}{35}$.

2.ª *Se si moltiplica o si divide il denominatore di una frazione per un numero qualunque*, senza alterarne il numeratore, *si divide o si moltiplica la frazione per questo numero.*

Infatti, allorchè si moltiplica il denominatore della frazione per 2, 3, 4... è evidente che si divide l'unità principale in un maggior numero di parti; così esse sono più piccole: e siccome d'altronde non alterando il numeratore si prende lo stesso numero di parti, così la nuova frazione che risulta è 2, 3, 4... volte più piccola.

Al contrario, se dividiamo il denominatore per 2, 3, 4... si rende questa frazione un egual numero di volte maggiore, poichè questa si compone sempre del medesimo numero di parti, ma divenute ciascuna di queste 2, 3, 4... volte maggiori delle prime.

3.ª *Non si cangia il valore di una frazione moltiplicando o dividendo i suoi due termini per un medesimo numero.*

Infatti, resulta dalla 1.ª e dalla 2.ª conseguenza, che l'effetto dell'operazione prodotto sul denominatore distrugge l'effetto dell'operazione prodotto sul numeratore; così vi è compensazione.

Da queste osservazioni possiamo dedurne le seguenti proposizioni

Moltiplicando / Dividendo	il numeratore	si moltiplica / si divide	la frazione.
Moltiplicando / Dividendo	il denominatore	si moltiplica / si divide	la frazione.

126. Stabiliti questi principii converrebbe passare alle diverse operazioni che si possono effettuare sopra le frazioni. Ma avanti di far conoscere le quattro operazioni fondamentali, cioè la *somma*, la *sottrazione*, la *moltiplicazione* e la *divisione* delle frazioni, conviene far conoscere due *trasformazioni* di un uso frequente, e le quali sono operazioni *particolari* al calcolo delle frazioni.

La prima di queste risulta dall'osservare la tavola del (n.° 125). Infatti, tutte le frazioni,

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \frac{7}{14}, \text{ec.},$$

il denominatore delle quali contiene due volte il numeratore, esprimono sotto diverse forme la metà dell'unità. Le frazioni

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \frac{5}{15}, \frac{6}{18}, \frac{7}{21}, \text{ec.},$$

il denominatore delle qnali contiene tre volte il nnmeratore, rappresentano tutte il terzo dell'unità. Ma se di tutte le forme che prende nell'uno e nell'altro esempio la frazione proposta, la prima è la più notabile essendo la più semplice, da ciò vediamo che vi possono essere un'infinità di frazioni espresse con termini differenti, ma tutte uguali fra loro. E siccome quella che ha i dne termini più piccoli è la più semplice, e dovendo eseguire dell'operazioni sopra una data frazione, queste si eseguiranno con maggior facilità sopra le più semplici; così ne emerge la conseguenza, che, data una frazione qualunque, la prima operazione necessaria farsi sopra la medesima, qualora sia possibile, è quella di ridurla alla sua più *semplice espressione*, cioè di ridurla ai suoi minimi termini.

Ora la riduzione alla più semplice espressione delle frazioni, consiste nel cercare il numero più grande che divide

nel medesimo tempo il numeratore e il denominatore (giacchè dalla sola ispezione della tavola del (n°. 125) rilevasi, che mediante ciò la frazione non cangia di valore), ossia a cercare il massimo comun divisore del numeratore e del denominatore, questione già risoluta (n.° 115).

Infatti siano le frazioni $\frac{738}{936}$, $\frac{73}{510}$.

Cerco il massimo comun divisore col citato metodo, come si vede qui sotto.

936		510	
738	1	73	6
198	3	72	1
144	1	1	
54	2		
36	1		
18	2		
0			

Si trova così, che il massimo comun divisore di 738 e 936 è il numero 18, pel quale divisi i numeri 738 e 936, ottengo 41, 52; vale a dire che

$$\frac{738}{936} = \frac{41}{52}.$$

Quanto alla frazione $\frac{73}{510}$ essa è irriducibile, atteso che l'unico divisore comune dei due numeri 73 e 510 è l'unità.

Passiamo adesso a trattare dell'altra operazione particolare delle frazioni.

127. Questa operazione, o trasformazione, ha per oggetto *ridurre alla medesima specie o al medesimo denominatore due o più frazioni di specie differente, o di differenti denominatori.*

Ora il principio, che non si altera il valore di una frazione moltiplicando i due termini della medesima per uno stesso numero, dà il mezzo per eseguire una tale trasformazione.

Siano, per esempio, le frazioni $\frac{5}{7}$ *e* $\frac{7}{11}$ *che si tratti di ridurre al medesimo denominatore.*

Se si moltiplicano i due termini 5 e 7 della prima frazione pel denominatore 11 della seconda frazione, e i due termini 7 e 11 della seconda frazione pel denominatore 5 della prima, abbiamo

$$\frac{55}{77} \text{ e } \frac{49}{77}$$

per le due frazioni domandate.

In primo luogo queste frazioni hanno il medesimo valore delle prime mediante il principio stabilito (n.° 125 3.°): inoltre esse hanno certamente lo stesso denominatore perchè ciascuna di esse resulta dalla moltiplicazione dei due denominatori primitivi 7 e 11.

Siano ancora le frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$ *da ridursi al medesimo denominatore.*

Si moltiplicano i due termini 2 e 3 della prima frazione per 28, prodotto dei denominatori 4 e 7 della seconda e della terza frazione; quindi si moltiplicano i due termini 3 e 4 della seconda frazione per 21, prodotto dei denominatori 3 e 7 della prima e della terza frazione; finalmente si moltiplicano i due termini 5 e 7 della terza frazione per 12, prodotto dei denominatori 3 e 4 della prima e della seconda frazione; di modo che nascono le nuove frazioni

$$\frac{56}{84}, \frac{63}{84}, \frac{60}{84}.$$

Queste frazioni, per lo stesso principio accennato di sopra, hanno il medesimo valore delle date; inoltre hanno uno stesso denominatore, poichè ciascuna risulta dalla moltiplicazione dei tre denominatori 3, 4 e 7.

Questo metodo è generale, e può estendersi a qualunque numero di frazioni, laonde potremo stabilire la seguente

Regola generale: *per ridurre un numero qualunque di frazioni al medesimo denominatore, si moltiplicano successivamente i due termini di ciascuna di esse pel prodotto effettuato de' denominatori dell' altre frazioni.*

Ecco la maniera di eseguire questa regola nella pratica quando le frazioni sono in maggior numero.

Siano le sei frazioni $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{11}$ e $\frac{7}{13}$.

Per maggior semplicità si dispone così l'operazione

$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{7}{13}$
15015,	10010,	6006,	4290,	2730,	2310
$\frac{15015}{30030}$,	$\frac{20020}{30030}$,	$\frac{18018}{30030}$,	$\frac{17160}{30030}$,	$\frac{13650}{30030}$,	$\frac{16170}{30030}$

Si comincia dal formare il prodotto dei denominatori delle sei frazioni 2, 3, 5, 7, 11, e 13, che dà 30030; si divide successivamente questo prodotto per ciascun denominatore, e si ottengono i sei quozienti 15015, 10010, 6006, 4290, 2730, 2310, che si scrivono respettivamente al di sotto delle sei frazioni proposte: dopo si moltiplicano i due termini di ciascuna frazione pel quoziente che le corrisponde, e tutte le frazioni rimangono così ridotte al medesimo denominatore.

È facile il rendere ragione del perchè si opera in questa guisa. Siccome il numero 30030 risulta dal prodotto dei sei denominatori 2, 3, 5, 7, 11, 13, così è evidente, che, allorquando dividiamo questo prodotto pel denominatore 2 della prima frazione, si ottiene il prodotto dei cinque denominatori, 3, 5, 7, 11 e 13 dell'altre frazioni. Egualmente 10010 essendo il quoziente della divisione di 30030 pel secondo denominatore 3, è uguale al prodotto dei cinque altri denominatori 2, 4, 7, 11, 13. Lo stesso ragionamento serve per gli altri quozienti. Questo mezzo è molto più sollecito di quello di effettuare per i due termini di ciascuna frazione la moltiplicazione de' denominatori delle cinque altre frazioni.

È utile servirsi di questo metodo tutte le volte che si hanno più di tre frazioni da ridurre al medesimo denominatore.

129. Vi è un caso in cui la riduzione delle frazioni al medesimo denominatore può esser molto più semplice: que-

sto accade *allorquando il maggiore dei denominatori è esattamente divisibile per ciascuno degli altri.*

Siano, per esempio, le frazioni

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{5}{6} & \frac{7}{8} & \frac{5}{9} & \frac{7}{12} & \frac{5}{72} \\ 24, & 18, & 12, & 9, & 8, & 6, & 1 \\ \hline \frac{48}{72}, & \frac{54}{72}, & \frac{60}{72}, & \frac{63}{72}, & \frac{40}{72}, & \frac{42}{72}, & \frac{5}{72} \end{array}$$

Con facilità vedesi che 72 è esattamente divisibile per ciascuno degli altri sei denominatori 3, 4, 6, 8, 9, 12.

Ciò premesso, si effettuano successivamente queste divisioni, e si pongono i quozienti 24, 18, 12, 9, 8, 6 al di sotto delle sei prime frazioni; dopo di che si moltiplicano i due termini di ciascuna di esse pel quoziente che le corrisponde, lasciando intatta la frazione $\frac{5}{72}$; così tutte le frazioni si trovano ridotte al medesimo denominatore 72.

129. Alcune volte, senza che il maggior denominatore sia divisibile, si conosce che moltiplicandolo per 2, 3, 4 . . . si ottiene *un prodotto divisibile esattamente per tutti i denominatori:* in questo caso può ancora semplicizzarsi il calcolo.

Siano le nuove frazioni

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{5}{8} & \frac{7}{9} & \frac{11}{18} & \frac{7}{16} & \frac{13}{36} \\ 48, & 36, & 18, & 16, & 8, & 9, & 1 \\ \hline \frac{96}{144}, & \frac{108}{144}, & \frac{90}{144}, & \frac{112}{144}, & \frac{88}{144}, & \frac{63}{144}, & \frac{52}{144} \end{array}$$

Il denominatore 36 è divisibile per 3, 4, 9 e 18, ma non lo è per 8 e per 16: moltiplicando però per 4 si ottiene 144, numero evidentemente divisibile per tutti i denominatori.

Premesso ciò, si formeranno i quozienti della divisione di 144 per i denominatori dati, e si metteranno respettivamente al di sotto delle frazioni: quindi si moltiplicheranno i due termini di ciascuna frazione pel quoziente che gli corrisponde; così tutte le frazioni saranno ridotte al comun denominatore 144.

130. Queste abbreviazioni richiedono molta franchezza nel calcolare. Il seguente metodo, che consiste nel *ridurre un numero qualunque di frazioni al denominatore il più semplice possibile*, non ammette alcun tentativo.

Siano le frazioni

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{7}{12} & \frac{5}{16} & \frac{7}{36} & \frac{11}{84} & \frac{73}{144} & \frac{17}{360} & \frac{23}{480} \\
840\ , & 630\ , & 280\ , & 120\ , & 70\ , & 28\ , & 21 \\
\hline
\frac{5880}{10080}, & \frac{3150}{10080}, & \frac{1960}{10080}, & \frac{1320}{10080}, & \frac{5110}{10080}, & \frac{476}{10080}, & \frac{483}{10080}
\end{array}$$

Si comincia (n.° 120) dal cercare il più piccolo numero che contenga tutti i denominatori, vale a dire si cercano gli elementi di tutti i denominatori come segue

12	2	16	2	36	2	84	2	144	2	360	2	480	2
6	2	8	2	18	2	42	2	72	2	180	2	240	2
3	3	4	2	9	3	21	3	36	2	90	2	120	2
		2	2	3	3	7	7	18	2	45	3	60	2
								9	3	15	3	30	2
								3	3	5	5	15	3
												5	5

Di questi elementi riterremo quelli soltanto, che sono alla più alta delle potenze.

$$2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 = 2^5$$
$$3 \,.\, 3 = 3^2$$
$$5 \text{ e } 7.$$

Il prodotto di questi elementi è 10080, numero che divideremo per ciascun denominatore come segue

$$\begin{array}{rcr}
 & & 10080 \\
\hline
12 & — & 840 \\
\hline
16 & — & 630 \\
\hline
36 & — & 280 \\
\hline
84 & — & 120 \\
\hline
144 & — & 70 \\
\hline
360 & — & 28 \\
\hline
480 & — & 21
\end{array}$$

Questi quozienti si scriveranno respettivamente al di sotto di ciascuna frazione, e quindi moltiplicheremo i due termini di ciascuna frazione pel quoziente che le corrisponde, ed è evidente che così tutte le frazioni si troveranno ridotte al medesimo denominatore.

Ecco alcune applicazioni di questa teoria.

131. *Si domanda, date le due frazioni* $\frac{3}{5}$ *e* $\frac{7}{12}$, *qual è la maggiore.* È chiaro che se vorremo arrivare a rispondere adeguatamente a questa questione, sarà necessario, che le frazioni siano della medesima specie, cioè che abbiano lo stesso denominatore; poichè in questo caso, siccome l'unità principale rimane divisa in un medesimo numero di parti, è chiaro, che quella, che avrà un maggior numeratore, sarà la più grande.

Ora, ridotte al medesimo denominatore queste frazioni, si ottiene

$$\frac{36}{60} \text{ e } \frac{35}{60};$$

dunque la frazione $\frac{3}{5}$ è la più grande, e supera la frazione $\frac{7}{12}$ di $\frac{1}{60}$.

Se le frazioni date fossero tre, cioè

$$\frac{3}{5} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{7}{13},$$

ridotte al medesimo denominatore darebbero

$$\frac{273}{455}, \quad \frac{325}{455}, \quad \frac{245}{455}:$$

donde deducesi, che la maggiore è $\frac{5}{7}$, e la minore $\frac{7}{13}$.

Le frazioni si potrebbero ancora ridurre al medesimo numeratore *moltiplicando i due termini di ciascuna di loro pel prodotto de' numeratori di tutte le altre.*

Ecco una nuova questione.

Qual cangiamento si produce in una frazione aggiungendo un medesimo numero ai suoi due termini?

Sia, per esempio, la frazione $\frac{6}{13}$, *ai due termini della quale si aggiunge* 5.

La frazione, che ne risulta, sarà $\frac{11}{18}$.

Ora se si riducono al medesimo denominatore queste due frazioni, la prima sarà $\frac{108}{234}$ e la seconda $\frac{143}{234}$; dunque la frazione proposta, mediante l'aumente di 5 al numeratore e al denominatore, è aumentata $\frac{35}{234}$.

Ciò infatti doveva succedere, ed anche senza la riduzione al medesimo denominatore potevamo rimanerne convinti. Infatti l'unità è uguale $\frac{13}{13}$, e la differenza, che passa fra l'unità e la frazione data, è $\frac{7}{13}$; ed egualmente la differenza dell'unità con la frazione risultante $\frac{11}{18}$, è di $\frac{7}{18}$. I numeratori di queste frazioni sono ugnali, e così doveva succedere; poichè 11 e 18 essendo stati formati mediante l'aggiunta del numero 5 ai numeri 6 e 13, era necessario che la stessa differenza, che passa fra 11 e 18, passasse pure fra 6 e 13. Ma la differenza $\frac{7}{18}$ è più piccola della differenza $\frac{7}{13}$ perchè i numeratori essendo nguali è più piccola quella frazione, che ha un maggior denominatore; dunque la frazione $\frac{11}{18}$ differisce meno dall'unità di $\frac{6}{13}$; dunque essa è più grande.

Si può ancora concludere, che quanto più è grande il numero aggiunto ai due termini della frazione $\frac{6}{13}$, tanto più la differenza fra l'unità e la nuova frazione è piccola; poichè il numeratore di questa differenza essendo sempre 6, il denominatore aumenta continuamente, e così la frazione diventa tanto più grande.

Questo ragionamento potendo applicarsi a qualunque alra frazione, possiamo concludere che, *se ai due termini d*

una frazione si aggiunge uno stesso numero, la frazione risultante è maggiore della frazione proposta, ed è tanto più grande quanto il numero aggiunto è più forte.

Per la ragione inversa *una frazione diminuisce di valore allorquando si sottrae un medesimo numero dai suoi due termini.*

Stabilite le due operazioni particolari alle frazioni, vale a dire *la riduzione alla più semplice espressione* e la *riduzione al medesimo denominatore*, siamo adesso in grado di passare alle quattro operazioni sopra le medesime.

DELL' ADDIZIONE DELLE FRAZIONI

L' addizione delle frazioni ha per oggetto trovare un sol numero che abbia lo stesso valore di più frazioni riunite.

Non potendosi sommare che dei numeri della stessa specie, e le frazioni dipendendo dal suo denominatore, ossia dalla quantità delle parti in cui è stata divisa l' unità principale, così si possono presentare due casi: o le frazioni, che vogliamo sommare, hanno il medesimo denominatore, o non lo hanno. Nel primo caso serve sommare i numeratori e dare a questa somma il denominatore comune. Nel secondo è indispensabile di cominciare a ridurle al medesimo denominatore mediante la regola poco fa insegnata (n.° 128); dopo di che si opera come nel primo caso.

Esempio del primo caso

$$\frac{7}{85}+\frac{13}{85}+\frac{11}{85}+\frac{10}{85}+\frac{3}{85}=\frac{44}{85}$$

Si sommano i numeratori 7, 13, 11, 10, 3, dai quali si ottiene 44 per somma, alla quale si dà per denominatore il numero 85, denominatore comune delle frazioni date.

Esempio del secondo caso

Siano le frazioni da sommarsi

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}$$

Comincio dal ridurle al medesimo denominatore (n°. 130), e quindi eseguisco l'operazione come si vede qui sotto.

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}$$
$$12,\quad 8,\quad 6,\quad 4,\quad 3$$
$$\frac{12+16+18+20+21}{24}=\frac{87}{24}.$$

Quando il numeratore della somma è maggiore del denominatore, come in questo esempio, questa somma contiene una o più unità principali o interi, che si determinano dividendo il numeratore pel denominatore.

Così nella frazione $\frac{87}{24}$, dividendo il numeratore pel denominatore, si troverà che questa frazione equivale a $3\frac{15}{24}$, ossia (n.° 126) $3\frac{5}{8}$, cioè tre interi più la frazione $\frac{5}{8}$ è la somma delle frazioni date.

Si può dare il caso di aver da sommare più numeri interi accompagnati da frazioni; allora si sommeranno separatamente i numeri interi, e poi tutte le frazioni, e quindi riuniremo tutto in un solo numero.

Sia per esempio da sommarsi

$$35\frac{4}{5},\ \frac{2}{7},\ 2\frac{2}{3},\ 7\frac{8}{9}.$$

Si dispongano prima di tutto questi numeri nel modo seguente:

$$35+\frac{4}{5}+\frac{2}{7}+2+\frac{2}{3}+7+\frac{8}{9},$$

si faccia quindi l'addizione de'numeri interi, cioè $35+2+7$, ossia 44 per somma: si riducano quindi le frazioni al medesimo denominatore (n.° 130)

$$\frac{4}{5} + \frac{2}{7} + \frac{2}{3} + \frac{8}{9}$$

$$63\ ,\ 45\ ,\ 105\ ,\ 35$$

$$\frac{252 + 90 + 210 + 280}{315} = \frac{832}{315} = 2 + \frac{202}{315}.$$

dall' addizione delle quali si ottiene $2 + \frac{202}{315}$ che unito alla somma 44 trovata per i numeri interi, dà per somma di tutti i numeri dati $46 + \frac{202}{315}$.

DELLA MOLTIPLICAZIONE DELLE FRAZIONI

132. Parlando dei numeri interi si vide che quando si dovevano sommare più numeri uguali, se ne aveva la somma più prontamente per mezzo d' un operazione chiamata moltiplicazione (n.° 28). E se ora ragioniamo come allora, avremo lo stesso vantaggio nell' addizione delle frazioni. Infatti, sommare più frazioni uguali, indica sommare più volte lo stesso numero di unità frazionarie della medesima specie, e quindi dee risultare lo stesso tanto da aggiungere questo numero di unità frazionarie successivamente a se stesso tante volte quante sono le date frazioni, ovvero a moltiplicare una di esse per un numero intero che contenga tante unità quante sono le date frazioni.

Premesso ciò, in questa operazione vi sono da considerare tre casi.

1.° Che si abbia da moltiplicare una frazione per un intero.

2.° Che si abbia da moltiplicare un intero per una frazione; e finalmente

3.° Una frazione per una frazioue.

Prima d' inoltrarsi è utile rammentare la definiziene data della moltiplicazione (n.° 32), cioè che essa consiste nel *trovare un numero che si componga con un altro, come un terzo numero si compone dell' unità.*

Passiamo adesso a considerare ciascuno dei tre casi.

133. 1.° CASO: *moltiplicare una frazione per un intero.*

Si abbia da moltiplicare $\frac{2}{3}$ *per* 5; ciò equivale evidentemente a

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{10}{3}=3\tfrac{1}{3},$$

vale a dire a ripetere il numeratore della frazione moltiplicando $\frac{2}{3}$ tante volte quante sono le unità contenute nel moltiplicatore 5, cioè a moltiplicare il numeratore 2 per 5. Potremo quindi stabilire.

Che *si moltiplica una frazione per un numero intero moltiplicando il numeratore della data frazione per questo numero e il prodotto sarà rappresentato da una frazione che avrà per numeratore questo prodotto e per denominatore il denominatore della frazione.*

Esempi

$$\frac{4}{5}\times 8=\frac{32}{5}=6\tfrac{2}{5}, \qquad \frac{7}{8}\times 9=\frac{63}{8}=7\tfrac{7}{8}$$

Quello che abbiamo detto in questo esempio combina con quanto si disse (n.° 125), cioè che moltiplicando per un numero intero il numeratore della frazione si moltiplica la frazione. Da questo stesso paragrafo avremmo potuto dedurre la moltiplicazione delle frazioni per un numero intero: ma il modo col quale l'abbiamo dedotta è più atto a farci comprendere, che tali moltiplicazioni altro non sono che metodi d'addizione, e che i prodotti, che ne risultano, non sono che vere somme di più frazioni uguali a quelle che si sono moltiplicate.

E poichè vedemmo (n.° 125) che una frazione si moltiplica ugualmente per un numero intero dividendo il suo denominatore; così quando si potrà dividere esattamente il denominatore della data frazione pel dato numero intero, preferiremo questo metodo perchè il prodotto risulterà più semplice. Per esempio, dovendo moltiplicare $\frac{9}{16}$ per 4, poichè 4 è divisore del

denominatore 16, così dividendo 16 per 4 si ha per prodotto la frazione $\frac{9}{4}$, prodotto che evidentemente è uguale a $\frac{9 \times 4}{16}$, ossia a $\frac{36}{16}$, perchè dividendo per 4 i due termini della frazione $\frac{36}{16}$ riducesi a $\frac{9}{4}$.

134. 2.° Caso. *Moltiplicare un intero per una frazione.*

Si abbia per esempio da moltiplicare 9 *per* $\frac{5}{7}$.

In questo caso, siccome il moltiplicando 9 deve essere ripetuto $\frac{5}{7}$ dell' unità, equivale (n.° 132) a cercare un numero che si componga del 9 come i $\frac{5}{7}$ si compongono della unità. Perciò basterà osservare che il 7.° di 9 è equivalente a $\frac{9}{7}$, e poichè non devo prendere $\frac{1}{7}$ ma bensì $\frac{5}{7}$, così sarà necessario di ripetere 5 volte questo risultamento, cioè moltiplicarlo per 5, il che darà $\frac{45}{7}$.

Potremo quindi fissare, che *si moltiplica un intero per una frazione moltiplicando l' intero pel numeratore della frazione, scrivendo questo prodotto per numeratore della frazione risultante, e dando per denominatore a questa frazione il denominatore della frazione moltiplicatore.*

Esempi

$$11 \times \frac{7}{8} = \frac{77}{8} = 9\,\tfrac{5}{8}, \qquad 13 \times \frac{5}{6} = \frac{65}{6} = 10\,\tfrac{5}{6}.$$

Osservazione. Nel 1.° caso, siccome moltiplicare una frazione per un numero intero vuol dire ripetere il numeratore della frazione un dato numero di volte rappresentato dall' unità che esistono nel moltiplicatore, vale a dire (n. 125) ad aumentare la frazione, così la frazione che risulta da questa operazione deve esser più grande della frazione moltiplicando. Nel 2.° caso poi, cioè in quello di moltiplicare un intero per una frazione, siccome questo si riduce a prendere una

parte di un numero intero, così il prodotto dee necessariamente risultare minore del moltiplicando.

135. 3.° Caso. *Moltiplicare una frazione per una frazione.*

Si abbia da moltiplicare $\frac{3}{5}$ *per* $\frac{7}{11}$: scrivo queste due quantità come segue

$$\frac{3}{5}\times\frac{7}{11},\ \frac{21}{5},\ \frac{21}{55}.$$

Non considerando per un momento il denominatore della frazione moltiplicatore $\frac{7}{11}$, operiamo come se si dovesse moltiplicare $\frac{3}{4}$ per 7. È evidente, per quello che abbiamo detto (n.° 133), che il prodotto risultante sarebbe $\frac{21}{5}$; ma osservando che non dovevo moltiplicare per 7 ma bensì per $\frac{7}{11}$, vale a dire per un numero 11 volte minore di 7, così il prodotto ottenuto $\frac{21}{5}$ sarà 11 volte troppo grande; dovrò perciò renderlo 11 volte più piccolo, ciò che otterrò moltiplicando il suo denominatore 5 per 11 (n.° 125), per cui avrò $\frac{21}{55}$. Il prodotto di $\frac{3}{5}$ per $\frac{7}{11}$ è uguale per conseguenza a $\frac{21}{55}$.

Se riflettiamo attentamente al metodo da noi seguito per ottenere questo risultamento, si vedrà che abbiamo moltiplicato prima il numeratore del moltiplicando per quello del moltiplicatore, sotto il di cui prodotto abbiamo scritto il prodotto del denominatore del primo pel denominatore del secondo. Concludiamo perciò che:

Per moltiplicare una frazione per un'altra frazione bisogna moltiplicare il numeratore pel numeratore, e il denominatore pel denominatore, e quindi dividere il primo prodotto pel secondo.

Questo caso poteva egualmente dimostrarsi con lo stesso metodo tenuto pel 2.° caso, ma ho preferito questa dimostrazione non solo per farla conoscere, quanto perchè effettivamente sembrami di più facile intelligenza per la gioventù.

Per una simil ragione si vede che ancora in questo caso il prodotto risultante dee essere minore del moltiplicando dato.

Esempi

$$\frac{7}{8}\times\frac{5}{9}=\frac{35}{72}, \qquad \frac{5}{6}\times\frac{3}{11}=\frac{15}{66}=\frac{5}{22}.$$

136. Finalmente i due fattori della moltiplicazione, ovvero uno dei due, possono essere degli interi uniti a delle frazioni, ma questo caso con facilità si prova che dipende dai precedenti.

Si abbia da moltiplicare $7\frac{5}{8}$ *per* $4\frac{3}{4}$.

Possiamo cominciare a ridurli a numeri frazionari (n.° 124), ciò che darà $\frac{61}{8}$ e $\frac{19}{4}$, quindi effettuandone la moltiplicazione con la data regola del n.° 135, otterremo per prodotto $\frac{1159}{32}$ ed estraendo gli intieri $36\frac{7}{32}$.

Possiamo eseguire questa operazione moltiplicando ancora per parti, cioè moltiplicare prima 7 per 4, quindi 7 per $\frac{3}{4}$, poi 4 per $\frac{5}{8}$ e finalmente $\frac{5}{8}$ per $\frac{3}{4}$, e aggiungere tutti questi prodotti insieme; ma questa operazione è molto più lunga e non si eseguisce mai nella pratica, e solo perchè non possa dai giovani essere ignorata, ne eseguisco l'operazione.

Tipo del Calcolo

$$\begin{array}{rl}
7\ \frac{5}{8} & \\
4\ \frac{3}{4} & \\
\hline
28 & \ldots\ldots\ldots\ldots \textit{prodotto di 4 per 7} \\
5\ \frac{1}{4} & \ldots\ldots\ldots \textit{prodotto di 7 per } \frac{3}{4} \\
2\ \frac{1}{2} & \ldots\ldots\ldots \textit{prodotto di 4 per } \frac{5}{8} \\
-\ \frac{15}{32} & \ldots\ldots\ldots \textit{prodotto di } \frac{5}{8} \textit{ per } \frac{3}{4} \\
\hline
\text{Prodotto}\ldots\ 36\ \frac{7}{32}. &
\end{array}$$

137. Moltiplicare vuol dire prendere un numero tante volte quante sono le unità che trovansi nel moltiplicatore (n.° 29): siccome moltiplicare per 1 significa prendere il moltiplicando una volta, così moltiplicare per $\frac{1}{2}$ significherà prendere il moltiplicando una mezza volta, ossia prenderne la metà, e moltiplicare per $\frac{1}{4}$ varrà prendere il quarto del moltiplicando e così di seguito. Rigorosamente parlando le definizioni che si sono date della moltiplicazione (n.° 29 e 32) convengono a tutti i casi possibili, purchè il moltiplicatore sia un numero intero, o un numero frazionario; tuttavia quando il moltiplicatore è un numero frazionario, l'operazione effettivamente è una divisione, giacchè moltiplicare un numero qualunque per $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$.... equivale realmente a dividerlo per 2, 3, 4,.... e moltiplicare lo stesso numero per $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ ec. è lo stesso che dividerlo prima per 3, 5, ec. e quindi moltiplicare il quoziente per 2, 4, ec.

136. Siccome in alcuni casi possiamo essere nel caso di prendere una parte di un numero intero, così ve ne saranno ancora altri in cui dovremo prendere una frazione di una frazione: come, per esempio, dopo aver diviso un intero in 9 parti uguali, e dopo aver preso 8 di queste parti, si domandasse i tre quarti di questi otto noni.

Per indicar tale operazione sono necessarie due frazioni, la prima delle quali indichi qual parte si dee prendere dell'altra frazione. Per esempio i $\frac{3}{4}$ di $\frac{8}{9}$, significa che devono prendersi i tre quarti di otto noni, e tali espressioni diconsi *frazioni di frazioni.*

Tutti i numeri interi o fratti avendo il loro valore determinato dalla relazione che vi è tra essi ed il numero 1; per avere una giusta idea del numero indicato da una frazione di frazione, bisogna ridurla ad essere rappresentata da un numero solo. Per vedere come ciò può eseguirsi cominciamo dall'esaminare la frazione di frazione $\frac{1}{4}$ di $\frac{1}{9}$, caso in cui le due frazioni hanno 1 per numeratore.

Prendere un quarto di un nono significa che prima dee dividersi l'unità intera in nove parti uguali, che deve quindi suddividersi uno di questi noni in 4 parti uguali, e che dobbiamo quindi prendere un solo di questi quarti di un nono; e vediamo che mentre sono necessari 4 di questi quarti di un nono per formare un nono, ne sono necessarii 9 volte 4, ossia 36 per formare un'unità intera; cioè $\frac{1}{4}$ di $\frac{1}{9}$ uguale $\frac{1}{36}$. E siccome lo stesso discorso fatto sopra la suddetta frazione di frazione può farsi ugualmente per ogni altra, così *qualunque frazione di frazione, le cui frazioni abbiano 1 per numeratore, si ridurrà ad un numero solo moltiplicando i denominatori fra loro; risultando da ciò una sola frazione che avrà detto prodotto per denominatore, e 1 per numeratore.*

Esaminiamo ora la frazione di frazione $\frac{1}{4}$ di $\frac{5}{9}$ in cui la prima frazione soltanto ha 1 per numeratore. Avendo veduto che un quarto di un solo nono è lo stesso che $\frac{1}{36}$, un quarto di $\frac{5}{9}$ sarà lo stesso che $\frac{5}{36}$.

Esaminiamo infine la frazione di frazione i $\frac{3}{4}$ di $\frac{5}{9}$, la quale significa che si prende prima un quarto di cinque noni, e che quindi si replichi 3 volte. Ma abbiamo veduto che il quarto di $\frac{5}{9}$ è equivalente a $\frac{5}{36}$; dunque i $\frac{3}{4}$ di $\frac{5}{9}$ verranno rappresentati da $\frac{5}{36} \times 3$, ossia da $\frac{15}{36}$. Ed è evidente che il numeratore 15 risulta dal moltiplicare i due numeratori fra loro, e che il denominatore 36 risulta ugualmente dal moltiplicare i due dati denominatori fra loro. Onde *qualunque frazione di frazione si ridurrà ad un numero solo moltiplicando i due numeratori e i due denominatori tra loro; risulterà così la frazione di frazione rappresentata da una sola frazione che avrà per numeratore il prodotto de' numeratori, e per denominatore il prodotto de' denominatori delle due date frazioni.*

Così i $\frac{7}{8}$ di $\frac{2}{3}=\frac{7\times2}{8\times3}=\frac{14}{24}=\frac{7}{12}$; ed i $\frac{7}{8}$ di $\frac{5}{11}=\frac{7\times5}{8\times11}=\frac{35}{88}$.

Se si avesse $\frac{1}{2}$ di $\frac{1}{3}$ di $\frac{1}{5}$ ciò significherebbe che si deve prendere prima il terzo della frazione $\frac{1}{2}$, quindi il quinto del risultamento; per avere il terzo di un mezzo, moltiplico questa frazione per $\frac{1}{3}$ ed ho $\frac{1}{6}$; per avere il quinto di quest' ultimo numero, lo moltiplico per $\frac{1}{5}$ ed ho per ultimo risultamento $\frac{1}{30}$.

Si opererebbe nello stesso modo per ottenere $\frac{2}{3}$ di $\frac{4}{5}$, di $\frac{2}{7}$ di $\frac{3}{4}$; cioè si moltiplicherebbe il numeratore di una frazione per quelli di tutte le altre, come pure il denominatore di una per tutti i denominatori delle altre, e scrivendo il secondo prodotto sotto al primo si avrebbe il risultamento totale, che sarebbe $\frac{48}{420}=\frac{4}{35}$.

DELLA SOTTRAZIONE DELLE FRAZIONI

137. Vedemmo (n.° 49) che abbiamo molte volte bisogno di conoscere la differenza che passa fra due numeri interi dati: questo stesso bisogno esiste ancora nei numeri frazionarii.

Quando si sottraeva un numero intero da un numero intero si toglieva dal minuendo (n.° 50) tante unità intere quante ne indicava il minutore; quindi con lo stesso metodo faremo la sottrazione delle frazioni, sottraendo dalla data frazione tante unità frazionarie quante ne numera l'altra data frazione, ossia sottraendo il numeratore d'una frazione dal numeratore dell'altra frazione, poichè i soli numeratori numerano le unità frazionarie. Nella sottrazione, come nell'addizione dei numeri frazionarii, abbiamo la stessa difficoltà, che non può eseguirsi la sottrazione se le frazioni non hanno

lo stesso denominatore, perchè nell'altro caso le unità frazionarie non essendo della stessa specie non possono paragonarsi tra loro. Onde se dovremo sottrarre una frazione da un' altra frazione, la ridurremo prima allo stesso denominatore, quando abbiano denominatori diversi, e quindi si sottrarrà il numeratore della frazione minutore dal numeratore della frazione minuendo, ed il resto o la differenza delle due frazioni sarà rappresentato da una frazione che avrà per numeratore la differenza dei due dati numeratori, e per denominatore il denominatore stesso delle date frazioni.

Cominciamo dal considerare il caso in cui le frazioni abbiano lo stesso denominatore.

Si abbia da sottrarre $\frac{3}{5}$ *da* $\frac{4}{5}$.

$$\frac{4}{5}-\frac{3}{5}=\frac{1}{5}.$$

Scrivo prima il minuendo, quindi fra il minuendo e il minutore vi interpongo il segno meno, e dico: dal numeratore 4 togliendo il numeratore 3 si ottiene per resto 1; dunque la differenza che passa fra le due frazioni $\frac{4}{5}$ e $\frac{3}{5}$, è di $\frac{1}{5}$.

Si abbia adesso da sottrarre $\frac{2}{5}$ *da* $\frac{7}{8}$.

Si comincia dal ridurre le due frazioni date al medesimo denominatore (n.° 127) e quindi si opera come nell' esempio antecedente

$$\frac{7}{8}-\frac{2}{5}=\frac{35}{40}-\frac{16}{40}=\frac{19}{40}.$$

Così la differenza fra $\frac{7}{8}$ e $\frac{2}{5}$ è di $\frac{19}{40}$.

Se la frazione minutore fosse maggiore dell' altra frazione, ovvero se essendo già ridotte le frazioni allo stesso denominatore, il numeratore della frazione minutore sarà maggiore del numeratore dell' altra frazione, la sottrazione non potrà eseguirsi, e potrà solo indicarsi.

138. Si dovrà talvolta sottrarre un numero intero da un numero frazionario, e un numero frazionario da un numero

intero. In questi due casi, siccome uno de' numeri rappresenta unità intere e l'altro unità frazionarie, prima di eseguire la sottrazione dovremo ridurli ambedue a rappresentare unità della stessa specie. Dovremo perciò ridurre il numero intero in frazione, ed in frazione tale che abbia per denominatore il denominatore istesso del dato numero frazionario (n.° 124).

Per esempio $7-\frac{3}{4}=\frac{7\times4}{4}-\frac{3}{4}=\frac{28}{4}-\frac{3}{4}=\frac{25}{4}=6\frac{1}{4}$.

e $\frac{19}{3}-5=\frac{19}{3}-\frac{3\times5}{3}=\frac{19}{3}-\frac{15}{3}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$.

Anche in questi casi sarà talvolta impossibile la sottrazione, e sarà generalmente impossibile quando dovremo sottrarre un numero intero da una frazione.

Se un solo o tutti i numeri dati fossero numeri interi accompagnati da frazioni, il metodo più generale è quello di ridurre prima i numeri dati tutti in frazione, e di operare quindi come s'è detto di sopra.

Può darsi un caso che si abbia un numero di frazioni, parte delle quali debbano sommarsi e parte sottrarsi. Una tale operazione chiamasi riduzione e non può essere oggetto di difficoltà, mentre le regole date sono sufficienti per eseguirla, e solo per maggior chiarezza proponiamo il seguente

Esempio

Abbiasi da trovare il risultamento della seguente operazione

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{3}{5}+\frac{5}{8}-\frac{5}{9}-\frac{5}{12}+\frac{7}{18}-\frac{17}{36}$$

120, 90, 72, 45, 40, 30, 20, 10

$$\frac{240+270-216+225-200-150+140-170}{360}=\frac{875-736}{360}=\frac{139}{360}$$

Si comincia dal cercare gli elementi, e quindi dal ridurre le frazioni al medesimo denominatore per compendio (n.° 130), osservando per brevità di scrivere il denominatore una sola volta: ciò eseguito si sommano tutti i numeratori positivi 240, 270, 225, 140 il che dà 875; quindi si passa a

fare la somma dei numeratori negativi 216, 200, 150 e 170 con che si ottiene 736, e così tutto riducesi ad eseguire la sottrazione con i metodi spiegati sopra i numeri frazionarii $\frac{875}{360}$ e $\frac{736}{360}$, operazione, che eseguita dà per resto o risultamento delle frazioni date $\frac{139}{360}$.

DELLA DIVISIONE DELLE FRAZIONI

139. Poichè tutte le questioni che si possono proporre sopra i numeri interi possono pure proporsi sopra i numeri frazionarii, così potrà accadere che per risolverle dovremo decomporre un dato numero di unità frazionarie in più numeri di unità frazionarie tutti uguali tra loro e tali, che la loro somma sia uguale al numero dato, come vedemmo (n.° 65) parlando dei numeri interi. E siccome si disse allora quanto era necessario per far comprendere l'origine del metodo idoneo a risolvere tali questioni, così basterà ora di esaminare le operazioni che debbono farsi per applicarlo ai numeri frazionarii, e basterà rammentare che un tal metodo dicesi *divisione*, per cui si decompone una moltiplicazione già fatta, e che ogni questione risolubile per la divisione, tradotta che sia in questo linguaggio, si riduce sempre alla seguente: *dato un prodotto e uno dei suoi fattori trovare l'altro fattore.*

Rammenterò ugualmente l'altra definizione data della divisione (n.° 72. IV), cioè che essa è *un'operazione per mezzo della quale si divide un numero in tante parti uguali quante unità son contenute in un altro*, la quale può cangiarsi ancora nella seguente: *trovare un terzo numero che si componga col primo nella stessa maniera che il secondo si compone coll'unità:* questa definizione ci sarà utile per la dimostrazione rigorosa della divisione.

140. Premesso ciò, nella divisione delle frazioni possono darsi tre casi:

1.° Dividere una frazione per un numero intero;
2.° Dividere una frazione per una frazione; e
3.° Dividere un intero per una frazione.

141. Cominciamo dal 1.° caso, vale a dire dal dividere una frazione per un intero.

Si abbia da dividere $\frac{3}{5}$ *per* 7.

Siccome il divisore 7 si compone di 7 volte l'unità, così il dividendo $\frac{3}{5}$ dovrà comporsi di 7 volte il quoziente cercato, oppure il quoziente dovrà essere il 7.° di $\frac{3}{5}$. Ora per rendere una frazione 7 volte più piccola vi sono due metodi, o di dividere (n.° 125. 1.ª) il numeratore 3 per 7, il che non può farsi nel nostro caso, ovvero (n.° 125. 2.ª) moltiplicare il denominatore 5 per 7, e non alterando il numeratore, avrò per risultamento $\frac{3}{35}$. Questa espressione indica un valore 7 volte più piccolo del dividendo dato $\frac{3}{5}$, poichè si hanno 3 unità, ma queste sono *trentacinquesimi*, mentre prima erano *quinti*, ed è evidente che un *trentacinquesimo* è la settima parte di un *quinto*, poichè dividendo $\frac{5}{5}$, ciascuno in sette parti uguali se ne formerebbero 35 altre parti 7 volte più piccole dei quinti.

Si abbia ora da dividere $\frac{25}{36}$ *per* 5.

In questo caso osservo che il numeratore 25 essendo un multiplo del divisore 5, può dividersi esattamente per esso, perciò invece di moltiplicare il denominatore 36 per 5 dividerò il numeratore 25 per 5 (n.° 125. 1.ª) ed avrò $\frac{5}{36}$ per risultamento. Avrei però potuto operare come nell'esempio antecedente, cioè moltiplicare il denominatore 36 per 5, e non alterando il numeratore, avrei avuto $\frac{25}{180}$, risultamento, il valore di cui equivale al precedente $\frac{5}{36}$ (n.° 126), ma che però è espresso con meno semplicità.

Siccome però sempre non è possibile dividere il numeratore della frazione dividendo per l'intero divisore, si può

in generale, per fare la divisione di una frazione per un intero, stabilire la seguente.

Regola generale. *Per dividere una frazione per un intero si moltiplica il denominatore di questa frazione per l'intero, lasciando stare il numeratore come è.*

Ecco per esercizio altri esempi di questa regola.

$$\frac{7}{12} : 5 = \frac{7}{60}, \quad \frac{11}{12} : 6 = \frac{11}{72}, \quad \frac{36}{37} : 12 = \frac{3}{37}.$$

142. 2.° Caso. *Si abbia da dividere* $\frac{5}{7}$ *per* $\frac{3}{4}$ cioè *una frazione per una frazione.*

In questo caso cerco un terzo numero che si componga con i $\frac{5}{7}$ come i $\frac{3}{4}$ si compongano coll'unità. Ciò significa che il dividendo dev'essere solamente i $\frac{3}{4}$ del quoziente; ma $\frac{1}{4}$ essendo $\frac{1}{3}$ di $\frac{3}{4}$, si avrebbe perciò $\frac{1}{4}$ del quoziente prendendo il terzo del dividendo $\frac{5}{7}$; e siccome prendere il terzo di $\frac{5}{7}$ significa rendere questa frazione 3 volte più piccola, e si rende una frazione 3 volte più piccola moltiplicando il suo denominatore per 3 (n.° 125. 2.°), così il terzo di $\frac{5}{7}$ è equivalente a $\frac{5}{21}$, ed esprime la quarta parte del quoziente che cerco. Per avere il quoziente intero bisognerà moltiplicare i $\frac{5}{21}$ per 4 e (n.° 133) verrà per risultamento finale $\frac{20}{21}$.

Questo secondo caso potrebbe esser dimostrato ancora come segue. Si abbia sempre la frazione $\frac{5}{7}$ da dividersi per $\frac{3}{4}$. È evidente che se cancellassi il denominatore 4 della frazione $\frac{3}{4}$ otterrei 3 interi, poichè tutte le volte che si sopprime il

denominatore di una frazione, il suo numeratore esprime un numero intero; ma ciò equivale ad aver reso il divisore quattro volte più grande, e ad avere alterato il rapporto che esisteva prima fra il dividendo $\frac{5}{7}$ e il divisore $\frac{3}{4}$. Questo rapporto però sarà ristabilito se dopo aver reso il divisore quattro volte più grande, quadruplicherò ugualmente il dividendo moltiplicandolo per 4; e siccome si rende una frazione un certo numero di volte più grande moltiplicando il suo numeratore per questo numero (n.° 125. 1.ª), così quadruplicherò la frazione $\frac{5}{7}$ se moltiplicherò 5 per 4; ciò facendo verrà $\frac{20}{7}$. La questione pertanto è ora ridotta a dividere $\frac{20}{7}$ per l'intero 3, operazione che si eseguisce come abbiamo insegnato (n.° 141), moltiplicando il denominatore per 3, e si ottiene perciò $\frac{20}{21}$.

Riassumendo le operazioni per mezzo delle quali abbiamo ottenuto in ambedue le dimostrazioni il quoziente $\frac{20}{21}$, risultamento della divisione di $\frac{5}{7}$ per $\frac{3}{4}$, si vede che il numeratore 20 di questo quoziente è il prodotto del numeratore 5 del dividendo moltiplicato pel denominatore 4 del divisore: come pure, che il denominatore 21 del quoziente è il prodotto del denominatore 7 del dividendo pel numeratore 3 del divisore. Da queste osservazioni possiamo dedurre la seguente

Regola generale. *Per dividere una frazione per una frazione si moltiplica il numeratore della frazione da dividersi pel denominatore della frazione divisore, e del prodotto risultante si forma il numeratore della frazione quoziente: quindi si moltiplica il denominatore della frazione da dividersi pel numeratore dell'altra, ed il risultamento sarà il denominatore della frazione quoziente.*

143. La regola espressa somministra un altro mezzo per dividere una frazione per una frazione. Si rovesci la frazione per cui si ha da dividere, e si operi quindi come nella moltiplicazione di una frazione per una frazione (n.° 135).

Ciò fa rilevare un'altra dimostrazione della divisione di una frazione per una frazione. Siccome qualunque sia per essere il quoziente moltiplicandolo pel divisore ne dee risultare il dividendo, così moltiplicando il quoziente pel numeratore, e dividendolo poi pel denominatore della frazione divisore ne risulterà il dividendo; infatti, allorchè moltiplicheremo il quoziente così ottenuto per la frazione divisore, essendo il numeratore e il denominatore della frazione quoziente multipli del denominatore e del numeratore della frazione divisore, eseguita la moltiplicazione e ridotta la frazione risultante, ritorneremo indubitatamente alla frazione dividendo.

Ecco degli esempi per la pratica della divisione

$$\frac{5}{7} : \frac{3}{4} = \frac{5 \times 4}{7 \times 3} = \frac{20}{21}, \qquad \frac{3}{7} : \frac{2}{5} = \frac{3}{7} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{14} = 1\,\frac{1}{14}.$$

144. 3.° Caso. *Si abbia da dividere il numero 7 per* $\frac{3}{4}$.

Prima di tutto, siccome $7 = \frac{7}{1}$, così potrei eseguire la divisione di 7 per $\frac{3}{4}$ come nel caso di dover dividere una frazione per una frazione, senza darne nuovamente la dimostrazione, ma per maggior chiarezza la daremo e saremo convinti che la cosa si riduce precisamente a moltiplicare il 7 pel denominatore 4 della frazione divisore, e a dividere questo prodotto pel numeratore 3.

Infatti, sopprimendo per un momento il denominatore 4 del divisore, lo rendo (n.° 142) 4 volte più grande, e cangio perciò il rapporto che esisteva prima tra il dividendo ed il divisore. Laonde per ristabilire questo rapporto (n.° 142) moltiplico il dividendo 7 per 4 ed ho 28, che divido per 3, ed ottengo $7\,\frac{1}{3}$ pel risultamento dell'operazione: dunque in generale

Si divide un numero intero per una frazione moltiplicando il dividendo pel denominatore del divisore, e dividendo il prodotto pel numeratore del divisore.

Esempi

$$7 : \frac{2}{3} = \frac{7 \times 3}{2} = \frac{21}{2} = 10\,\tfrac{1}{2}$$

$$14 : \frac{3}{5} = 14 \times \frac{5}{3} = \frac{70}{3} = 23\,\tfrac{1}{3}.$$

145. È evidente che qualunque sia il dividendo, quando il divisore è una frazione, il quoziente è sempre più grande del dividendo stesso. Infatti, in qualunque divisione si cerca in sostanza quante volte il divisore entra nel dividendo; ora se questo divisore è uguale all' unità, si ottiene un quoziente uguale al dividendo; dunque se il divisore è una frazione, vale a dire minore dell' unità, esso deve necessariamente esservi contenuto un maggior numero di volte, e deve perciò risultarne un quoziente maggiore del dividendo.

146. Tutte le operazioni eseguite nella divisione delle frazioni in alcuni casi particolari sono soggette ad una maggior semplicità.

Infatti nel 1.° caso, se il numeratore della frazione dividendo è divisibile esattamente per l' intero divisore, servirà dividerlo per l' intero ed avremo subito il quoziente domandato; poichè, come abbiamo veduto, dividere una frazione per un numero intero significa rendere la frazione data tante volte minore quante unità contiene l' intero, e ciò si eseguisce col moltiplicare il denominatore della frazione dividendo, ovvero col dividerne il numeratore. Così è indifferente di eseguire l' operazione o in un modo o nell' altro. Per esempio se avessi $\frac{9}{13}$ da dividere per 3, invece di moltiplicare il denominatore 13 per 3, dividerei il numeratore 9 per 3 ed avrei $\frac{3}{13}$ per risultamento.

Nel 2.° caso, vale a dire quando si ha da dividere una frazione per una frazione, se il numeratore della frazione dividendo è multiplo del numeratore della frazione divisore, per una ragione uguale a quella data sopra pel 1.° caso, potranno dividersi l' uno per l' altro. Per esempio $\frac{4}{5}$ da dividersi

per $\frac{2}{3}$: comincerò dal dividere il numeratore 4 del dividendo pel numeratore 2 del divisore, ed otterrò $\frac{2}{3}$, che moltiplicato pel denominatore 3 darà finalmente $\frac{6}{5}$, ovvero $1\frac{1}{5}$ pel quoziente domandato. Infatti, secondo la regola generale avremmo

$$\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5},$$

risultamento uguale a quello ottenuto di sopra.

Nel 3.° caso, se il numero intero fosse divisibile pel numeratore del divisore, si dividerebbe il numero intero per questo numeratore, dopo di che si moltiplicherebbe il quoziente pel denominatore della frazione per cui si ha da dividere, e quest' ultimo risultamento sarebbe il quoziente cercato.

Esempio.

$$8 : \frac{4}{5}, \qquad 8 : 4 = 2, \qquad 2 \times 5 = 10.$$

Divido 8 pel numeratore 4 ed ho 2; moltiplico questo ultimo per 5 ed ho 10 per risultamento definitivo di 8 diviso per $\frac{4}{5}$. Si può con facilità rendere ragione di una tale operazione. Infatti, se si trattasse di dividere 8 per 4 interi, si avrebbe 2 per quoziente, poichè 8 contiene il 4 due volte. Ma 8 deve contenere $\frac{4}{5}$ un maggior numero di volte, vale a dire 10 volte, poichè il numero $\frac{4}{5}$ è cinque volte minore di 4 interi; 4 interi essendo uguale a $\frac{20}{5}$ quindi è perciò che si moltiplica 2 per 5.

147. Finalmente, se si avesse un intero unito ad una frazione da dividere per un intero unito ad una frazione, si ridurrebbero gl' interi in frazioni, e si opererebbe come nel 2.° caso (n.° 142).

Si abbia per esempio $11\frac{2}{3}$ *da dividere per* $6\frac{3}{4}$.

Questi due numeri sono equivalenti (n.° 124) $\frac{35}{3}$, e $\frac{27}{4}$ sopra de' quali effettuando la divisione come segue si ottiene $1+\frac{59}{81}$

$$\frac{35}{3} : \frac{27}{4} = \frac{140}{81} = 1 + \frac{59}{81}.$$

148. *Osservazione generale sopra le frazioni.* Risulta evidentemente dai processi stabiliti che le quattro operazioni fondamentali delle frazioni in ultima analisi si riducono sempre alle medesime operazioni che si fanno sopra i numeri interi.

Infatti nella somma e nella sottrazione tosto che le frazioni sono ridotte al medesimo denominatore, queste si riducono alla somma o alla differenza dei loro numeratori.

Egualmente la moltiplicazione si eseguisce moltiplicando i numeratori e i denominatori fra loro. La divisione poi fa parte della moltiplicazione tutte le volte che si rovescia *la frazione divisore.*

Da ciò possiamo concludere, che i principii stabiliti (n.° 36 e 45) per la moltiplicazione dei numeri interi, si applicano ancora alle frazioni e, si stabilisce 1.°, *che il prodotto di due o più frazioni è il medesimo in qualunque modo si effettui la loro moltiplicazione;* 2.° *moltiplicare una frazione pel prodotto di più altre, equivale a moltiplicare la prima frazione per tutte le altre.*

Finalmente possiamo applicare alle frazioni tutte le proposizioni stabilite, n.° 87 e 88 sopra i cangiamenti che prova il prodotto di una moltiplicazione o il quoziente di una divisione quando facciamo subire dei cangiamenti ad uno dei termini che fanno parte dell' operazione che abbiamo in veduta di effettuare.

CAPITOLO IV.

DELLE FRAZIONI DECIMALI

149. Allorchè parlammo dei numeri frazionari si vide (n.° 95) che essi non potevano esprimersi e rappresentarsi se non che con due numeri da noi chiamati *numeratore* l'uno e *denominatore* l'altro, ed abbiamo certamente dovuto persuaderci che il sistema dei numeri frazionari è molto più complicato di quello dei numeri interi.

Conoscendo pertanto che il sistema dei numeri frazionari finora adottato non produce nel calcolo delle frazioni quella semplicità e facilità che si desidera, esaminiamo se vi sia un sistema migliore, che soddisfacendo alla generalità delle frazioni ordinarie, faciliti nel tempo stesso le operazioni che debbono farsi sopra i numeri frazionari.

Per eseguir ciò, rammenteremo che quello, che forma propriamente la gran semplicità del metodo de' numeri interi, è, che ogni unità intera vale costantemente dieci unità dell'ordine immediatamente inferiore; quindi le unità di un medesimo ordine si rappresentano con una sola cifra significativa, e che perciò basta lo scrivere le dette cifre significative le une a sinistra delle altre secondo il loro ordine, quando unità intere di più ordini debbono rappresentare un solo e medesimo numero.

Onde se nel determinare le frazioni particolari avessimo divisa qualunque unità principale in dieci unità frazionarie particolari, e poi avessimo suddivisa ciascuna di queste unità frazionarie particolari in dieci altre unità frazionarie minori, e così avessimo continuato a suddividere sempre ciascuna delle successive unità frazionarie in dieci unità minori; avremmo avuto tanti successivi ordini d'unità frazionarie particolari, ciascuna delle quali valendo costantemente dieci unità immediatamente inferiori, avrebbero formato un solo e medesimo sistema colle unità intere. Questo è ciò che faremo adesso, estendendo queste considerazioni a qualsivoglia unità principale.

150. Qualunque si sia pertanto l'unità principale, la sup-

porremo sempre divisa in dieci parti minori ed eguali fra loro. Ciascuna di queste parti essendo la decima parte o il decimo dell'unità principale, la chiameremo *decimo*. Così, per numerare tali frazioni dell'unità principale, diremo *un decimo*, *due decimi*, *tre decimi*, ec. . . . fino a *nove decimi*, perchè *dieci decimi* formano un'unità intera.

Per poter determinare le frazioni minori de'decimi, supporremo *un decimo* suddiviso in dieci parti più piccole ed uguali fra loro. Ciascuna di queste parti essendo un decimo d'un decimo, sarà il centesimo dell'unità principale, perchè l'unità principale essendo eguale a dieci decimi è per conseguenza eguale a dieci volte dieci, ossia a cento di queste parti. E perciò chiameremo *centesimi* tali frazioni, e per numerarle diremo *un centesimo*, *due centesimi*, . . . fino a *nove centesimi*, perchè *dieci centesimi* formano un decimo.

Per poter determinare le frazioni minori de'centesimi, supporremo *un centesimo* suddiviso in dieci parti più piccole ed uguali tra loro. Ciascuna di queste parti essendo il decimo d'un centesimo, sarà il centesimo di un decimo, ed il millesimo dell'unità principale; perchè il decimo essendo uguale dieci centesimi è per conseguenza uguale a dieci volte dieci, ossia a cento di queste parti, e perciò l'unità principale essendo uguale a cento centesimi è per conseguenza uguale a cento volte dieci, ossia a mille di queste parti. E perciò chiameremo *millesimi* tali frazioni, e per numerarle diremo *un millesimo*, *due millesimi* . . . fino a *nove millesimi*, perchè *dieci millesimi* formano un centesimo.

Per numerare quindi le frazioni minori supporremo un millesimo suddiviso in dieci parti più piccole, che chiameremo *dieci millesimi*. E così seguitando sempre a suddividere ciascuna delle frazioni minori in dieci parti più piccole, le chiameremo *cento millesimi*, *millionesimi*, *diecimillionesimi*, ec. derivando sempre questi nomi dalla parte che esse unità minori sono dell'unità principale.

In questo modo si ottiene una serie di unità frazionarie, ciascuna delle quali vale costantemente dieci unità immediatamente inferiori; e questa serie può prolungarsi quanto si vuole, perchè qualunque unità frazionaria, sia pur piccola quanto si vuole, potrà supporsi suddivisa in dieci parti

più piccole senza che siamo obbligati ad arrestarci mai in tali suddivisioni. E così non solo si ottengono unità frazionarie particolari, che hanno tra loro la stessa relazione che passa tra le unità intere, ma si ottiene pure un sistema di frazioni che ha una grandissima generalità.

151. Per distinguere le frazioni, di cui ora si tratta, dalle frazioni ordinarie, le chiameremo *frazioni decimali* a motivo che le unità frazionarie decrescono di dieci in dieci. E poichè sappiamo numerare le unità frazionarie decimali, passiamo ora ad esaminare come potremo rappresentarle in cifre.

152. Volendo nel calcolo delle unità decimali la stessa semplicità che si ha nel calcolo delle unità intere, bisogna rappresentarle colle solite cifre significative, e distinguerne gli ordini per mezzo di zeri. E quindi avendo distinte le diecine con uno zero, le centinaia con due zeri, ec.; distingueremo pure i decimi con uno zero i centesimi con due zeri, ec. Ma siccome scrivendo questi zeri alla destra delle cifre significative che numerano o decimi, o centesimi, ec.; si potrebbero confondere le unità decimali colle unità intere, così invece di scrivere gli zeri alla destra delle cifre significative, gli scriveremo alla loro sinistra, allorchè debbono rappresentare unità decimali.

E frattanto, mentre 10 rappresenta una diecina, o la riunione di dieci unità principali, 01 rappresenterà un decimo, o la decima parte dell'unità principale. E siccome potrebbe credersi che 1 rappresentasse anche un'unità principale, così per determinare con precisione che 1 rappresenta un decimo, porremo una virgola tra lo zero e la cifra significativa, scrivendo cioè 0,1. Nello stesso modo facendo, rappresenteremo due decimi scrivendo 0,2, rappresenteremo tre decimi 0,3,.. e rappresenteremo nove decimi scrivendo 0,9.

Nello stesso modo che 100 rappresenta un'unità di centinaia, ossia la riunione di cento unità principali, 001 rappresenterà un centesimo, ossia la centesima parte dell'unità principale. Per toglier però ogni dubbio che 001 rappresentar possa un'unità intera, e per evitar quindi che scrivendo 00,1 si potesse leggere un decimo, scriveremo 0,01 per rappresentare un

centesimo. E così 0,02 rappresenterà due centesimi, 0,03 tre centesimi, . . . 0,09 rappresenterà nove centesimi.

Per le medesime ragioni, 0,001 rappresenterà un millesimo, . . . 0,009 rappresenterà nove millesimi.

Così continuando, si rappresenteranno le successive unità decimali scrivendo sempre uno zero di più alla sinistra della cifra significativa, che le numera, ossia facendo avanzar sempre d'un posto più verso la destra detta cifra significativa, ed avvertendo di scriver sempre la virgola dopo il primo zero cominciando da sinistra.

Riflettendo ora al modo con cui abbiamo rappresentato le unità decimali, si vede che i decimi si trovano al primo posto a destra dopo la virgola, che i centesimi si trovano al secondo posto, il millesimo al terzo posto, ec. a destra dopo la virgola, onde le unità decimali si trovano situate più o meno distanti alla destra della virgola secondo i loro ordini, e sono per conseguenza distinte le une dalle altre soltanto pel posto che occupano.

153. Poichè le unita decimali si rappresentano in un modo simile a quello col quale si rappresentano unità intere, potremo rappresentare i numeri decimali col medesimo metodo de' numeri interi.

Numeri decimali si dicono quelli che numerano unità decimali o d'un ordine solo o di più ordini; e poichè le unità decimali di diversi ordini si distinguono tra loro pel posto che occupano alla destra della virgola; così quando unità decimali di più ordini dovranno rappresentare un solo e medesimo numero decimale, invece di scrivere separatamente e precedute da zeri le cifre significative che numerano le date unità decimali, si scriveranno esse cifre significative le une accanto dell'altre, avvertendo pero di scrivere quelle di esse che rappresentano unità d'ordine minore sempre più avanti d'un posto verso la destra. E in questo modo si ottiene semplicemente rappresentato ogni numero decimale col solo far variare di posto le cifre significative appunto come segue nei numeri interi.

Per esempio, per rappresentare in cifre il numero *tre decimi*, più *sette centesimi*, più *cinque millesimi*, invece di scrivere 0,3 + 0,07 + 0,005, si scriverà 0,375.

Se mancheranno alcuni ordini di unità decimali tra quelli che debbono comporre il numero decimale, mancheranno allora altrettante cifre significative al numero decimale, e invece di esse cifre si scriveranno altrettanti zeri, affinchè le cifre significative rappresentanti si trovino al loro vero posto, ed abbiano perciò il loro vero valore. Per esempio, il numero *sette centesimi*, più *due dieci millesimi*, più *cinque dieci millionesimi* si scriverà 0,0702005.

Se il dato numero comprendesse ancora unità intere, oltre le unità decimali, si scriveranno queste alla sinistra dei decimi in luogo dello zero, lasciando però sussistere la virgola fra le unità intere e le unità decimali, affine di distinguerle. Così il numero *ventitre* più *sette diecine*, più *tre millesimi*, si scriverà 23,703.

154. Vediamo adesso se si possano esprimere più semplicemente i numeri decimali, affinchè si possano più facilmente leggere allorchè ci sono presentati in cifre, e più facilmente dettargli quando si debbono scrivere.

Le unità decimali ugualmente che le unità intere valgono costantemente dieci unità dell'ordine immediatamente inferiore: onde ciascuna unità decimale vale dieci unità di un ordine inferiore, cento unità di due ordini inferiori, ec.; quindi tutte le unità decimali, che compongono un dato numero, si potranno pronunziare come se fossero unità intere, purchè alla fine si aggiunga al loro numero il nome delle unità decimali dell'ultimo ordine inferiore. Per esempio, avendo da leggere il numero 0,235, poichè questo numero comprende 2 decimi più 3 centesimi più 5 millesimi, e 3 centesimi valgono trenta millesimi; così il suddetto numero si pronunzierà *dugentotrentacinque millesimi*.

Tutto ciò che abbiamo detto per scrivere un numero intero quando ci venga dettato (n.° 12) o per leggerlo quando si trovi scritto in cifre (n.° 11), si applica interamente ai numeri decimali. Qui solamente ripeteremo che quando avremo da leggere un numero decimale molto grande, useremo il solito artifizio di separarne le cifre di tre in tre cominciando dalla destra, di leggere poi dette cifre cominciando da quelle di maggior valore come se numerassero unità intere, e di aggiungere quindi al loro numero il nome che distin-

gue le unità decimali dell'ultimo ordine compreso nel dato numero. Bisogna però avvertire, che nel separare di tre in tre le cifre del numero dato, quantunque si possano tali separazioni marcare con quel segno che si vuole, è necessario però evitare assolutamente la virgola, siccome destinata a distinguere le unità decimali dalle unità intere.

Si abbia, per esempio, da leggere il numero

0,1295678023

Separo le cifre di tre in tre cominciando dalla destra, marcando tali separazioni con punti, come si vede qui sotto

0,1 . 295 . 678 . 023,

e quindi lo leggo dicendo: *un bilione dugento novantacinque milioni, seicento settantotto mila, ventitre dieci billionesimi.*

Egualmente se fosse dato il numero che comprende unità intere e decimali 293,4567 si legge dicendo: *dugento novantatre unità e quattromila cinquecento sessantasette dieci millesimi.*

Ma siccome tanto le unità intere che le unità decimali formano un medesimo sistema, valendo ciascuna dieci unità di un ordine inferiore, cento unità di due ordini inferiori, ec., così si potrà leggere un numero intero e decimale anche considerandolo come se numerasse tutte unità intere, purchè si aggiunga alla fine il nome che distingue le unità decimali dell'ultimo ordine comprese in detto numero. Leggendo con questo metodo il numero 293,4567 si dirà: *due milioni novecento trentaquattro mila cinquecento sessantasette dieci millesimi.*

155. Dalle nozioni stabilite sopra i decimali ne risultano le seguenti proprietà particolari alle frazioni decimali.

1.ª Due o più rotti decimali, che abbiano dopo la virgola lo stesso numero di cifre, hanno ancora lo stesso denominatore. Infatti, essi non sono che veri rotti improprii o proprii, secondo che avanti la virgola hanno o cifre significative o lo zero; se non che il denominatore è sottinteso ed equivale all'unità seguita da tanti zeri quante cifre sono dopo la virgola.

2.ª Siccome $\frac{7}{10} = \frac{70}{100} = \frac{700}{1000}$ ec.; così ne risulta, che

l'aggiunta o la soppressione di uno o più zeri alla destra delle cifre decimali non altera il valore di una frazione decimale.

3.ª Da ciò risulta un metodo facilissimo per ridurre due o più frazioni decimali di diverso numero di cifre, e perciò di diverso denominatore, ad avere uno stesso denominatore. Infatti, siccome l'aggiunta o la soppressione degli zeri alla destra delle cifre decimali non ne altera il loro valore, potremo aggiungere o sopprimere tanti zeri alla destra delle frazioni date, da operare in guisa che esse abbiano lo stesso numero di cifre, e quindi lo stesso denominatore.

Per esempio, siano date le frazioni decimali 0,3, 0,77, 0,7035, 0,650000 che ci proponiamo di ridurre ad uno stesso denominatore. Osservo che la frazione, che abbia più cifre significative dopo la virgola, è 0,7035; questa avendone quattro, aggiungo o sopprimo alla destra delle altre tanti zeri di modo che tutte abbiano quattro cifre dopo la virgola, ed ottengo così

0,3000, 0,7700, 0,7035, 0,6500,

frazioni che avendo un egual numero di cifre dopo la virgola, hanno un medesimo denominatore, e che, da quanto abbiamo detto, hanno ancora il medesimo valore delle frazioni date.

4.ª Dati due o più rotti decimali, che abbiano un diverso numero di cifre, quello avrà un maggior valore che avrà prima degli altri di seguito alle virgole una maggior cifra significativa; infatti riducendoli tutti al medesimo denominatore col metodo esposto, è visibile che avrà un maggior valore quello che avrà la maggior cifra significativa dopo la virgola.

Siano le frazioni 0,35, 0,750007, e 0,8 ridotte al medesimo denominatore: queste danno

0,350000, 0,750007, 0,800000

Ora, dalla sola ispezione delle medesime, si riconosce che la terza frazione è quella che ha un maggior valore delle altre.

5.ª Avanzando la virgola di uno o più posti verso la destra in un numero, questo acquista un valore 10, 100, 1000, ec. maggiore ed è come se si moltiplicasse per 10, 100, 1000, ec.; Per esempio, se al numero 3164,75689 avanzo la virgola di uno, due, tre, quattro posti verso

la destra, ottengo 31647,5689; 316475,689; 3164756,89, 31647568,9, numeri che sono 10, 100, 1000, 10000 volte più forti del numero dato 3164,7569; infatti, coll'avanzare la virgola di ciascun posto, ciascuna cifra acquista un valore dieci volte maggiore.

L'inverso ha luogo portando la virgola verso la sinistra, così 316,475689, 31,6475689, 3,16475689 sono numeri che hanno un valore 10, 100, 1000 volte minore del numero dato 3164,75689, vale a dire che si sono divisi per 10, 100, 1000; infatti ad ogni retrocedimento della virgola ciascuna cifra acquista un valore dieci volte più piccolo. Risulta evidentemente da ciò il mezzo per dividere un uumero intero per 10, 100 ec. ossia per l'unità seguita da uno più zeri, separando cioè da esso tante cifre a destra quanti sono zeri alla destra dell'unità; e 75647 diviso per 1000 è uguale 75,647; diviso per 100000 è uguale 0,75647.

6.ª Se in un rotto decimale si sopprimono le ultime cifre, l'errore che si commette sarà tanto più piccolo quante più sono le cifre che rimangano. Così dato il rotto 0,3167342, se trascuro l'ultime due cifre 42, commetto un errore di 42 dieci millionesimi: invece se trascuro la sola cifra 2 non commetto l'errore che di 2 millionesimi. Negli usi ordinari delle società questi errori sono di niuna entità quando però non si debbano moltiplicare per numeri molto grandi d'interi, e si usa di non ritenere che cinque, quattro, e perfino tre decimali, a seconda della questione che ci viene proposta. Qualora la prima delle cifre soppresse sia un 5, ovvero più di 5, potremo diminuire l'errore aumentando di un'unità l'ultima delle cifre ritenute. Così dovendo sopprimere l'ultime due cifre del numero 0,8573 sarà minore errore scrivere 0,86 di quello che scrivere 0,85. Infatti 0,86 = 0,8600 e 0,85 = 08500: dunque il rotto dato differisce da 0,86 di 0,0027 e da 0,85 di 0,0073, cioè meno nel primo caso che nel secondo.

156. Cerchiamo adesso di convertire un rotto ordinario in frazione decimale.

Sia proposta la frazione $\frac{17}{43}$.

Il numero proposto essendo riportato all'unità principale

esprime i $\frac{17}{43}$ di questa unità; ma siccome un'unità vale dieci decimi, così 17 unità varranno 170 decimi, ossia $\frac{17}{43}$ sono equivalenti a $\frac{170}{43}$ di *decimo*. Così allorquando abbiamo disposto i due numeri 17 e 43, come nella divisione ordinaria, porremo uno 0 al quoziente e quindi una virgola; in seguito si divide il 170 per 43 e si ottiene un quoziente 3, che si scrive alla destra della virgola, e il quale rappresenta il numero dei *decimi* contenuti in $\frac{17}{43}$, vale a dire che $\frac{17}{43}$ è eguale a 3 *decimi* più $\frac{41}{43}$ di *decimo*. Similmente, siccome un decimo è eguale a 10 centesimi, ne segue che $\frac{41}{43}$ di *decimo* sono eguali a $\frac{410}{43}$ di *centesimo;* ed effettuando questa nuova divisione a 9 *centesimi*, più $\frac{21}{43}$ di *centesimo*. Scrivendo un nuovo zero alla destra di 23, e dividendo 230 per 43 si trova per quoziente 5 *millesimi* e per resto 15 alla destra del quale si pone un nuovo zero per farne dei *diecimillesimi*, e così di seguito, spingendo l'operazione tanto avanti quanto è necessario per ottenere un dato numero di cifre decimali.

Ecco il tipo del calcolo protratto fino a 7 decimali

$$\begin{array}{l|l} 170 & 43 \\ \cline{2-2} \;410 & 0{,}3953488 \\ \;\;230 & \\ \;\;\;150 & \\ \;\;\;\;210 & \\ \;\;\;\;\;380 & \\ \;\;\;\;\;\;360 & \\ \;\;\;\;\;\;\;16 & \end{array}$$

Potremo dall'esposto di sopra stabilire la seguente regola generale per convertire una frazione ordinaria in frazione decimale.

Si dispongono i due numeri come nella divisione ordinaria,

si scrive 0 *al quoziente e alla destra di questo* 0 *si pone una virgola.* Ciò premesso, *si mette alla destra del numeratore uno* 0 *e si divide il numero risultante pel denominatore; il quoziente che si ottiene esprime i decimi, e un certo resto. Si pone uno* 0 *alla destra di questo resto, e si divide il numero risultante pel denominatore; si ottiene un quoziente che esprime i centesimi, e un nuovo resto, e si divide il numero risultante pel denominatore; si ottiene un quoziente che esprime i millesimi, e un terzo resto* sopra del quale si opera nella medesima maniera. Finalmente si continua questa serie di operazioni fintantochè si siano ottenute tante cifre decimali quante ne esige la questione.

Se il numeratore della frazione è maggiore del denominatore, si comincia da estrarne gli interi, scrivendoli al quoziente invece dello 0 che doveva tenerne il posto.

Premesso tutto ciò, passiamo adesso ad eseguire le quattro operazioni fondamentali, cioè *l' addizione, moltiplicazione, sottrazione e divisione* delle frazioni decimali.

DELLA SOMMA DELLE FRAZIONI DECIMALI

157. Siccome le unità intere e le unità decimali formano una medesima serie di unità, ciascuna delle quali vale sempre dieci unità d'ordine immediatamente inferiore; e siccome ancora le unità decimali d'un medesimo ordine si trovano in un numero decimale rappresentate sempre da una sola cifra, come le unità intere d'un medesimo ordine in un numero intero, così si farà l'addizione de' numeri decimali col metodo stesso usato ne'numeri interi.

Si scriveranno i numeri interi e decimali gli uni sotto degli altri in modo che le unità di un medesimo ordine si trovino tutte in una stessa colonna; quindi si sommeranno parzialmente e successivamente tutte le unità per ordine, cominciando da quelle di minor valore, e facendo queste parziali addizioni, come se si dovessero sommare numeri interi (n.° 26). *Avuta poi la somma, si dovrà avvertire di separare in essa colla virgola le cifre che numerano unità decimali dalle cifre che numerano unità principali*, avvertendo che se i numeri dati non comprendessero gli stessi ordini decimali,

si potrà ad essi supplire, quando si voglia, con porre degli zeri alla destra di questi numeri.

Esempi

38,0100	0,475	6,320005
2,0750	0,075	0,7
304,8325	0,25	0,00005
0,7000	0,95	2,75
345,6175	1,740	9,770055

DELLA MOLTIPLICAZIONE DELLE FRAZIONI DECIMALI

158. Per fare l'addizione di più numeri decimali uguali potremo adoprare lo stesso metodo che chiamammo moltiplicazione ne' numeri interi, ed anzi la moltiplicazione si opera sopra le frazioni decimali come se essi fossero numeri interi, vale a dire senza fare verun attenzione alla virgola. Allorchè si è trovato la somma totale, *si separano con una virgola tante cifre decimali sopra la destra di questa somma quanti decimali vi sono nel moltiplicando e nel moltiplicatore.*

Per esempio, se si volesse moltiplicare 5,075 per 4,75, si moltiplicherà secondo il consueto, senza tener conto delle virgole e come se si trattasse di moltiplicare 5075 per 475. Si troverà in questo modo

```
   5,075
    4,75
   -----
   25375
  35525
 20300
 -------
 24,10625
```

L'addizione finale operata, si separerà con una virgola *cinque* cifre a diritta, perchè vi sono *tre* decimali nel moltiplicando e *due* nel moltiplicatore.

La ragione di ciò è evidente, poichè considerando 5,075 come il numero intero 5075, si rende questo numero *mille* volte troppo grande, come si rende *cento* volte troppo grande il

moltiplicatore 4,75 considerandolo come il numero intero 475. Il prodotto intero 2410625 è dunque da una parte mille volte più grande di quello che si domanda, e dall'altra cento volte troppo grande; egli è dunque in tutto *centomila* volte troppo grande; ma ponendo la virgola dopo la quinta cifra si cangiano le centinaia di migliaia in semplici unità, e si rende *centomila* volte più piccolo, ed è allora che esso rappresenta il vero valore del prodotto di 5,075 per 4,75.

159. Nella pratica succede sovente che il prodotto ha meno cifre, che non si hanno decimali da separare. Vi si supplisce allora scrivendo alla sinistra del prodotto tanti zeri perchè vi sia nel prodotto tante cifre quante ve ne sono nel moltiplicando e nel moltiplicatore, avvertendo di porre in questo caso uno zero invece delle unità, ed una virgola dopo per separare i decimali. Per esempio, il prodotto di 0,3 per 0,04, che è 12, quando si considerano 3 e 4 come numeri interi, e il prodotto dovendo contenere in questo caso tre decimali, si farà precedere da due zeri e si situerà la virgola dopo il primo. Avremo in questa guisa

$$0{,}3 \times 0{,}04 = 0{,}012.$$

Se osserviamo che 0,3 e 0,04 espresse in frazioni ordinarie sono $\frac{3}{10}$ e $\frac{4}{100}$, il di cui prodotto è (n.° 135). $\frac{3 \times 4}{10 \times 100} = \frac{12}{1000}$ e che 12 *millesimi* si scrivono 0,012, saremo certi di quanto abbiamo operato sopra, e come dobbiamo contenerci in casi simili. Ecco altri esempi di moltiplicazione.

45,8	3,54287	245,305
14	0,0052	0,100007
1842	708574	1717185
458	1771435	245305
641,2	0,018422924	24,532217135

DELLA SOTTRAZIONE DELLE FRAZIONI DECIMALI

160. La sottrazione si opera ugualmente come sopra i numeri interi; basta completare con degli zeri il numero delle

cifre decimali nelle due quantità proposte, e di procedere nel resto come se non ci fosse virgola. Si pone quindi la virgola del risultamento nella colonna dell'altre virgole. Si abbia, per esempio, da sottrarre 7,98765 da 27,75. Dopo avere scritto tre zeri in seguito di 27,75, il che non cangia per niente il valore di questo numero, si eseguisce la sottrazione secondo il metodo consueto.

$$\begin{array}{r} 27{,}75000 \\ 7{,}98765 \\ \hline 19{,}76235 \end{array} \textit{ differenza}$$

quindi si pone la virgola dopo il 19, vale a dire nel posto dell'altre virgole.

Per sottrarre 0,75 da 2,06875, si scriverebbe egualmente

$$\begin{array}{r} 2{,}06875 \\ 0{,}75000 \\ \hline 1{,}31875 \end{array} \textit{ differenza}$$

DELLA DIVISIONE DELLE FRAZIONI DECIMALI

161. Esaminiamo ora la divisione de' numeri decimali, e a tale oggetto rammenteremo che ogni questione risolubile per mezzo della divisione, tradotta che sia nel linguaggio di questo metodo, si riduce sempre alla seguente: *dato un prodotto ed uno de' suoi fattori cercarne l'altro fattore.*

Ora si sa (n.° 88) che il quoziente di una divisione rimane sempre lo stesso quando si moltiplica per uno stesso numero il dividendo e il divisore, giacchè così operando non si altera punto il rapporto di grandezza, che esisteva prima tra il numero delle unità di questi due fattori.

Da questa osservazione potremo con facilità dedurre il modo per eseguire la divisione de' decimali. Infatti se avremo da dividere un numero decimale per un altro, e questi numeri contengano la stessa quantità di cifre decimali, si potrà eseguire la divisione considerando tanto il divisore quanto il dividendo come numeri interi, mentre con ciò non avremo

che resi ambedue questi fattori 10, 100, 1000, 10000, ec. volte più grandi, secondo che conterranno una due, tre, quattro, ec. cifre decimali, ciò che si otterrà cancellando la virgola.

Abbiasi per esempio da dividere la quantità decimale 0,528 per 0,132

$$528 \left\{ \frac{132}{4} \right.$$

Tralascio la virgola tanto nell' uno che nell' altro numero; e siccome avevo tre cifre decimali nel dividendo e tre nel divisore, questi numeri diventeranno con ciò 1000 volte più grandi. Infatti le cifre 528 esprimevano, allorchè erano precedute dalla virgola, millesimi ed ora esprimono interi; lo stesso dicasi delle cifre 132 del divisore; quindi invece di avere a dividere 528 millesimi per 132 millesimi, si hanno 528 interi da dividere per 132 interi; il che dà per quoziente 4 intieri.

Si abbia ancora da dividere 48,56 per 24,28.

$$4856 \left\{ \frac{2428}{2} \right.$$

Cancello la virgola, ed avendo due decimali tanto nel dividendo quanto nel divisore, ho con ciò reso i numeri proposti 100 volte più grandi; divido quindi 4856 per 2428, come se fossero numeri interi, ed ho 2 per quoziente: avrei egualmente avuto 2 per quoziente se avessi diviso 4856 *diecimillesimi* per 2428 *diecimillesimi*.

161. Nel caso in cui il dividendo o il divisore non avessero decimali, si opererebbe similmente, scrivendo però prima di seguito al numero che manca di decimali tanti 0, quanti sono i decimali nell' altro.

Si abbia da dividere 36,18 per 18.

Se tralascio la virgola nel dividendo 36,18 lo rende 100 volte più grande (n.° 155. 5.°); è quindi necessario rendere anche il divisore 100 volte più grande, ciò che si fa scrivendo alla sua diritta due zeri (n.° 40). Avrò quindi da dividere 3618 per 1800, il che non offre altrimenti difficoltà.

Si debba ancora dividere 36,18, per 18,5: cancello la

virgola nel dividendo, ed avendo esso due decimali, lo rendo così 100 volte più grande: osservo quindi che cancellando la virgola nel divisore, siccome esso non contiene che un decimale, non lo rendo che dieci volte più grande; ed essendo indispensabile che il dividendo ed il divisore abbiano costantemente lo stesso rapporto, senza di che il quoziente che si otterrebbe, non sarebbe esatto, per rendere il divisore anch'esso 100 volte più grande pongo uno 0 di seguito al 5, ciò che non altera punto il valore di quel numero (n.° 155. 2.ª), ed ho 18,50, e cancellando la virgola 1850, valore cento volte più grande del primo. Ora dividere 36,18 per 18,50, è lo stesso che dividere 3618 per 1850, e perciò otterremo il quoziente al solito cancellando la virgola, e dividendo 3618 per 1850.

162. Si abbia ora da dividere 365,731 per 0,75.

Comincio dallo scrivere in seguito del divisore 75 uno zero, il che mi dà 0,750; quindi cancello la virgola tanto dal dividendo quanto dal divisore ed ottengo i numeri 365731 e 750, con i quali eseguisco la divisione come segue

$$\begin{array}{l|l} 365731 & 750 \\ \cline{2-2} 6573 & 487 \\ 5731 & \\ 481 & \end{array}$$

ed ottengo per quoziente 487 interi, più un resto 481, vale a dire che il quoziente completo è $487 + \frac{481}{750}$. Ora tolto sarebbe tutto il vantaggio dei decimali se si dovessero adoprare in alcuni casi le frazioni comuni: dunque gioverà, mediante la regola che abbiamo stabilita (n.° 156), di valutare in decimali la frazione $\frac{481}{487}$: questo è il motivo per cui riprendo nuovamente a considerare completamente la divisione dei numeri 365731 e 750

```
365731 |750
 6573  |487,64133
  5731
   4810
    3100
     1000
      2500
       2500
        250
```

Divido 365731 per 750 e trovo 487 per quoziente e 481 di resto; invece di porre questo avanzo nel quoziente, come abbiamo fatto in principio, ragiono come al (n.° 156) cioè; 481 non contiene più il divisore 750; ma se osservo che un' unità è eguale a 10 decimi, 481 unità saranno eguali a 4810 decimi, numero che contiene il divisore 750 sei volte più un resto 310: il numero 6 ottenuto mi rappresenterà i decimi del mio quoziente, e separando perciò con una virgola il quoziente intero 487, scriverò alla destra di questa virgola i 6 decimi. Parimente 310 decimi sono eguali a 3100 centesimi, e dividendo questo nuovo dividendo parziale per 750 ottengo 4 e un resto 100, metto il 4 in quoziente in seguito della cifra 6, quindi aggiungo uno zero al resto 100, il che mi dà 1000 millesimi, i quali divisi per 750 danno per la cifra dei millesimi da porsi in quoziente 1 e un resto 250; così proseguendo ottengo per quoziente approssimato 487,64133.

Siccome avrei potuto aggiungere uno zero al nuovo resto 250 e proseguire la divisione, così col mezzo dei decimali possiamo ottenere di approssimarsi quanto si vuole al quoziente esatto ogni qualvolta la divisione lasci qualche avanzo, e la regola da seguirsi in simil caso è di scrivere tosto alla diritta del primo avanzo tanti zeri quante cifre decimali si vogliono avere nel quoziente, giacchè moltiplicando questo avanzo per 10, 100, 1000, 10000, ec. è lo stesso che convertirlo in *decimi*, *centesimi*, *millesimi diecimillesimi*, ec. per cui nel quoziente si debbono necessariamente trovare *decimi*, *centesimi*, ec.

163. *Si abbia ancora da dividere* 0,075 *per* 6,41.

Sembra a prima vista, che operando secondo quanto abbiamo fatto fino a questo punto, la divisione non possa eseguirsi, poichè dovremmo aggiungere uno zero al divisore, il che darebbe 6,410, e quindi vedere quante volte entra nel dividendo 0,075, ed è evidente che fatta questa preparazione il divisore non entra nel dividendo; pure vedremo che la regola è la medesima e che salvo una leggiera modificazione saremo in grado di ottenere il quoziente cercato. Infatti

$$0{,}075 = \frac{75}{1000}, \quad e \quad 6{,}41 = \frac{641}{100}$$

e considerando il dividendo e il divisore come frazioni ordinarie, abbiamo (n.° 142)

$$\frac{75}{1000} : \frac{641}{100} = \frac{75 \times 100}{1000 \times 641} = \frac{75}{6410}$$

dal qual risultamento rilevasi che si tratta di dividere 75 interi per 6410 interi, ossia di ridurre in frazione decimale la frazione ordinaria $\frac{75}{6410}$, e che il divisore viene aumentato di uno zero, come lo prescrive la regola che abbiamo dato fin qui. Da ciò rilevasi, che la regola data non cangia, e che solo dopo avere ridotto il dividendo e il divisore ad avere un ugual numero di decimali, quando il divisore rimanga maggiore del dividendo, sarà necessario di considerare il caso che abbiamo risoluto (n.° 156) cioè di ridurre una frazione ordinaria a frazione decimale; ecco qui sotto per maggior chiarezza il tipo del calcolo

```
0,07500 | 6,410
  10900 | 0,0117
  44900
    030
```

Da quanto abbiamo veduto fin qui è evidente, che potremo stabilire la seguente regola generale per la pratica della divisione.

164. *Per dividere un numero decimale per un altro numero decimale, si rende prima con zeri eguale il numero delle cifre*

decimali nel dividendo e nel divisore, quindi si cancella la virgola e si opera come nella divisione dei numeri interi.

DELLE FRAZIONI DECIMALI PERIODICHE

165. Nella valutazione di una frazione ordinaria in frazione decimale siamo condotti, come vedremo, a delle circostanze particolari le quali meritano di essere esaminate.

Proponiamoci nuovamente di ridurre in frazioni decimali le frazioni ordinarie $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{7}{24}$.

Operando come al (n.° 156), avremo dalla 1.ª e dalla 2.ª

```
30 |8
   |0,375
 60
  40
```

```
20 |7
   |0,285714285
 60
  40
   50
    10
     30
      20
       60
        40
         5
```

Dalla terza verrà

```
70 |24
   |0,2916666
220
  40
  160
   160
```

Se osserviamo questi risultamenti, vedremo che la prima dopo le tre divisioni non ha dato verun resto, e che per conseguenza $\frac{3}{8} = 0,375$; dalla seconda dopo sei divisioni abbiamo avuto il medesimo resto 20, e per conseguenza abbiamo ottenuto in quoziente nuovamente le medesime cifre; nella terza poi dopo aver ottenuto tre cifre decimali in quoziente, si è ottenuto in seguito tutte cifre uguali.

Cerchiamo attualmente come può succedere ciò, e per rilevarlo con maggiore facilità analizziamo il processo che abbiamo adoprato per ridurre le frazioni ordinarie a frazioni decimali.

Ora per poco che si rifletta sopra quanto abbiamo fatto, vedremo che per operare questa riduzione, dopo avere scritto uno 0 al quoziente ed una virgola alla destra di questo zero, 1.° *abbiamo posto alla destra del numeratore uno zero e diviso il numero risultante pel denominatore*, ed abbiamo ottenuto in quoziente dei *decimi* ed un certo resto; 2.° *abbiamo posto un nuovo zero alla destra di questo resto e diviso il numero risultante pel denominatore*, con ciò abbiamo ottenuto in quoziente dei *centesimi* e un secondo resto; 3.° *abbiamo scritto un nuovo zero alla destra di questo secondo resto, e diviso il numero risultante pel denominatore;* ed abbiamo così proseguito fino a quel punto che abbiamo creduto per ottenere una data approssimazione.

Ora è evidente che mettere successivamente alla destra dei resti tanti zeri quante cifre decimali si vogliano ottenere, è la medesima cosa che scrivere di seguito questi zeri alla destra del numeratore della frazione proposta, cioè a *moltiplicare il numeratore per l'unità seguita da tanti zeri quante sono le cifre decimali che vogliamo avere, ed a separare verso la destra del quoziente il numero delle cifre decimali domandate:* mentre dal processo ordinario della divisione dei numeri interi, dobbiamo abbassare alla destra di ciascun resto uno degli zeri che abbiamo scritto in principio.

166. Da questa osservazione ne emergono le seguenti due proprietà.

1.ª *Ogni frazione ordinaria irriducibile, il di cui denominatore non si compone che di fattori primi* 2 *e* 5, *è riducibile in una frazione decimale di un numero limitato di cifre decimali, ed il numero dei decimali è indicato dal maggior numero di fattori* 2 *e* 5 *che entrano nel denominatore.*

In primo luogo il processo che abbiamo seguito nel ridurre una frazione ordinaria a frazione decimale riducesi, come abbiamo veduto, a moltiplicare il numeratore della frazione data per 10, 100, 1000, ec.: vale a dire per le potenze consecutive del 10 (n.° 96); ora $10 = 2 . 5$, 100, os-

sia $10^3 = 2^3 . 5^3$, 1000, ovvero $10^4 = 2^3 . 5^4$, ec. Laonde moltiplicando il numeratore dato per le potenze del 10 non si fa che introdurvi i fattori 2 e 5 elevati a diverse potenze. In secondo luogo poi è evidente, siccome il denominatore per cui si divide il numeratore così moltiplicato non si compone che dei fattori 2 e 5; che allorquando avremo introdotti nel numeratore per mezzo della moltiplicazione tanti fattori uguali a 2 e 5 quanti ne esistono nel più grande degli esponenti di 2 e 5 che contiene il denominatore, il prodotto risultante dovrà essere multiplo di questo denominatore; e di più il numero delle operazioni da effettuarsi dovrà essere limitato ed uguale al più grande dei due esponenti di 2 e di 5 che entrano nel denominatore; dunque avremo un numero di cifre decimali uguali a questo più grande esponente.

Esempi

Si abbiano le frazioni $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{25}$, *e* $\frac{11}{20}$.

Siccome 8 denominatore della prima frazione è uguale a 2^3, 25 denominatore della seconda è uguale a 5^2; e 20 denominatore della terza a $2^2 . 5$: così da quanto abbiamo esposto di sopra dovremo moltiplicare il numeratore della prima per 1000, e quello della seconda e della terza per 100: avremo con ciò

$$\begin{array}{r|l} 5000 & 8 \\ \cline{2-2} 20 & 0,625 \\ 40 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 700 & 25 \\ \cline{2-2} 200 & 0,28 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1100 & 20 \\ \cline{2-2} 100 & 0,55 \end{array}$$

2.ª *Ogni frazione ordinaria di cui il denominatore contiene uno o più fattori primi differenti da 2 e da 5, i quali non entrano nel medesimo tempo nel numeratore, dà luogo ad una frazione decimale di un numero di cifre decimali illimitato o infinito. Di più la frazione decimale che ne risulta è periodica, vale a dire, che dopo un dato numero di operazioni, le stesse cifre decimali si riproducono nel medesimo ordine.*

Infatti, siccome la moltiplicazione per 10, 100, 1000, ec. del numeratore non fa che introdurvi dei fattori 2 e 5 i quali non entrano nel denominatore, così avendo supposto primi

fra loro tanto il numeratore quanto il denominatore, anche il prodotto risultante dopo la moltiplicazione di questi fattori dovrà necessariamente rimanere primo col denominatore, e per quanto grande sia il numero dei fattori introdotti, la divisione pel denominatore non potrà farsi mai esattamente; così l' operazione si continuerà fino all' infinito.

Inoltre, siccome seguendo il processo della divisione (n.° 78) ciascun resto è minore del divisore che rimane costante, così ne segue, che quando avremo fatte almeno tante operazioni quante unità vi sono nel divisore meno una, dovremo ricadere sopra uno dei resti già ottenuti.

Allora scrivendo uno zero alla destra di questo resto, avremo un nuovo dividendo parziale, il quale sarà simile ad uno dei precedenti; e poichè il divisore è il medesimo, il quoziente e il nuovo resto, che otterremo, saranno ancora simili a quelli che erano stati dati dal primo dividendo ritrovato e dal divisore. Scrivendo alla destra di questo resto uno zero, riprodurremo il dividendo parziale che segue immediatamente quello che avevamo ritrovato prima, e per conseguenza anche il quoziente che viene dopo di quello che abbiamo già ritrovato. Dunque la frazione che ne risulta è periodica.

Esempi

Si abbiano le frazioni ordinarie $\frac{3}{7}$ *e* $\frac{11}{37}$, *e proponiamoci di ridurle in frazioni decimali.*

Operando come abbiamo insegnato di sopra (n.° 165) ne risulteranno le due seguenti operazioni, cioè

30	7			110	37		
20	0,428571	428571...		360	0,297	297	297...
60				270			
40				110			
50							
10							
30							

Nella frazione $\frac{3}{7}$ il periodo si manifesta dopo la sesta

cifra, e nella frazione $\frac{11}{37}$ dopo la terza, vale a dire, molto prima di quello che l'indica il denominatore 37.

167. Si abbia da ridurre in frazione decimale la frazione $\frac{7}{24}$: otterremo

$$\begin{array}{l|l} 70 & 24 \\ \cline{2-2} 220 & 0{,}2916 \,|\, 666 \\ \quad 40 & \\ \quad 160 & \\ \quad\ 160 & \end{array}$$

Osservando questo caso, vedremo che le prime tre cifre non fanno parte del periodo, mentre nei primi esempi il periodo comincia subito dopo la virgola, e ciò accade perchè il denominatore 24, oltre ad avere un fattore 3 differente da 2 e da 5, contiene ancora uno di questi fattori. Infatti $48 = 8 \,.\, 3 = 2^3 \,.\, 3$.

Le frazioni decimali periodiche, il di cui periodo comincia subito dopo la virgola, diconsi *frazioni periodiche semplici;* e quelle, il di cui periodo comincia dopo un dato numero di cifre, si appellano *frazioni periodiche miste.*

Stabilito che le frazioni ordinarie ridotte in decimali danno luogo o a una *frazione decimale esatta*, o a una *frazione periodica semplice*, o a una *frazione periodica mista*, cerchiamo un mezzo per ritornare da queste alle frazioni ordinarie che gli hanno dato origine.

168. Dal modo col quale abbiamo ottenuto le frazioni decimali esatte è chiaro, che ritorneremo da queste alle frazioni ordinarie, che gli hanno dato origine, dividendo le cifre decimali ottenute per l'unità seguita da tanti zeri quante sono le cifre decimali, e quindi riducendo alla più semplice espressione la frazione risultante.

Esempi

$$0{,}625 = \frac{625}{1000} = \frac{5}{8}, \qquad 0{,}28 = \frac{28}{100} = \frac{7}{25}.$$

Infatti, nel primo esempio della frazione $\frac{625}{1000}$, i due termini della medesima si trovano (n.° 126) divisibili per 125, che perciò eseguita la divisione otteniamo $\frac{5}{8}$. Ugualmente i termini della frazione $\frac{28}{100}$ sono ambedue divisibili per 4, ed eseguite le divisioni, danno $\frac{7}{25}$.

169. Per risolvere la nostra qnestione per le frazioni periodiche semplici e per le frazioni periodiche miste, osserveremo che la frazioni, le quali hanno per denominatore un numero qualunque di 9, non hanno nel loro periodo se non che la cifra significativa 1. Infatti

$$\frac{1}{9} = 0{,}11111\ldots.$$

$$\frac{1}{99} = 0{,}010101\ldots.$$

$$\frac{1}{999} = 0{,}001001001\ldots.$$

$$\frac{1}{9999} = 0{,}000100010001\ldots.$$

e così delle altre; poichè ciascuna delle divisioni parziali si eseguisce sopra i numeri 10, 100, 1000, ec. e lascia perciò per resto sempre l' unità.

Per mezzo di questa osservazione si passa con facilità da una frazione periodica semplice alla frazione ordinaria da cui ella deriva. Infatti, supponiamo di avere una frazione decimale periodica il di cui periodo si componga di una sola cifra. Sia questa 0,33333...: è evidente, che moltiplicando per 3 la frazione 0,1111.... si ottiene precisamente la frazione 0,33333...: e siccome 0,1111... proviene da $\frac{1}{9}$, 0,3333... proverrà da $\frac{3}{9}$, ossia da $\frac{1}{3}$.

170. Passiamo adesso alle frazioni il cui periodo si compone di due cifre e sia una di queste, per esempio, 0,3636..., questa risulterà dal moltiplicare lo sviluppo di $\frac{1}{99}$ per 36, ed

eseguendolo avremo

$$\frac{1}{99} \times 36 = \frac{36}{99} = 0{,}363636\ldots.$$

e dividendo i due termini della frazione $\frac{36}{99}$ per 9, avremo $\frac{4}{11}$. Ed infatti la frazione $\frac{4}{11}$ è quella che dà origine alla frazione 0,3636... quando riducesi in decimali.

Se il periodo della frazione decimale si componesse di 3 cifre, come per esempio di 0,432432 ... questo si paragonerebbe allo sviluppo di $\frac{1}{999}$, ed operando come sopra si otterrebbe

$$\frac{1}{999} \times 432 = 0{,}001001\ldots \times 432 = 0{,}432432\ldots$$

donde

$$0{,}432432\ldots = \frac{432}{999} = \frac{16}{37}.$$

E così di seguito se il periodo si componesse di più cifre.

In generale *la frazione ordinaria, dalla quale risulta una frazione decimale periodica semplice, si ottiene dividendo le cifre del periodo per tanti* 9 *quante cifre vi sono in questo periodo.*

171. Passiamo adesso a ricercare la frazione ordinaria che può aver generato una frazione periodica mista qualunque, e per render più facile una tale ricerca partiamo da un esempio particolare, procurando però che il ragionamento, di cui ci serviremo per arrivare alla soluzione della nostra questione, sia tanto generale da potersi in seguito applicare a qualunque siasi frazione periodica mista.

Sia la frazione periodica mista 0,44 . 047619 . 047619 ...

Osservo prima di tutto, che non si altera una frazione qualunque moltiplicandola e dividendola per uno stesso numero (n.° 125. 3.ª): e siccome nella frazione periodica mista data le cifre fuori di periodo sono due, così la moltiplico e la divido per 100; vale a dire per l'unità seguita da tanti zeri quante sono le cifre fuori di periodo.

Ora si moltiplica una frazione decimale qualunque per 10, 100, ec. avanzando la virgola dalla sinistra alla destra di uno o due posti ec. (n.° 155. 5.ª). Così dopo aver moltiplicato la frazione data per 100, essa diverrà

$$44{,}047619\,.\,047619\ldots$$

e dividendola per 100 per non alterarne il valore, la potremo mettere sotto la forma

$$\frac{1}{100}(44{,}047619\,.\,047619\ldots.)\ldots.(1).$$

La quantità dentro le parentesi si compone della parte intera 44, più della frazione decimale periodica semplice 0,047619 . 047619 e questa è (n.° 170) uguale alla frazione ordinaria

$$\frac{47619}{999999}.$$

Laonde sostituendo in (1) avremo

$$\frac{1}{100}\left(44+\frac{47619}{999999}\right).$$

Moltiplicando la quantità dentro parentesi per $\frac{1}{100}$ verrà

$$\frac{44}{100}+\frac{47619}{99999900},$$

riducendo al medesimo denominatore (n.° 130) avremo finalmente

$$\frac{44\times 999999+47619}{99999900}\ldots\ldots.(2).$$

Si eseguisce la moltiplicazione di 999999×44 e riunendo il prodotto al numero 47619, avremo la frazione $\frac{44047575}{99999900}$ che dovrà ridursi alla più semplice espressione (n.° 126)

99999900	
44047575	2
11904750	3
8333325	1
3571425	2
1190475	3
0000000	

donde rilevasi che i due termini della frazione ottenuta sono divisibili esattamente pel numero 1190475. Ne eseguisco perciò le divisioni, e trovo i quozienti 37 e 84; dunque la frazione periodica mista

$$0{,}44\,.\,047619\,.\,047619 = \frac{44047575}{99999900} = \frac{37}{84},$$

frazione che ridotta in frazione decimale, rende la frazione periodica mista data.

Siccome i principii, dei quali ci siamo serviti per giungere all'espressione (2) sono già stati dimostrati; e di più sono applicabili a qualunque siasi frazione periodica mista, così esaminando detta espressione potremo stabilire.

Che *una frazione periodica mista è uguale alle cifre fuori di periodo moltiplicate per tanti nove quante sono le cifre di periodo, aumentato questo prodotto delle cifre del periodo, e diviso tutto per tanti nove quante sono le cifre del periodo seguite da tanti zeri quante sono le cifre fuori di periodo.*

172. Nella pratica potremo abbreviare questa operazione con risparmiarci la moltiplicazione delle cifre fuori di periodo pel numero dei 9 che esistono nel periodo. Infatti $99 = 100 - 1$, $999 = 1000 - 1$, ec., così invece dei nove potremo mettere l'unità seguita da tanti zeri quanti sono questi nove, e quindi diminuire questo numero di un'unità, moltiplicare poi i nuovi numeri per le cifre fuori di periodo, e per eseguir ciò basterà di aggiungere alla destra del numero rappresentato dalle cifre fuori di periodo un numero di zeri uguale al numero delle cifre del periodo, e quindi dal numero risultante levare il numero che si compone delle cifre fuori di periodo.

Mediante questa osservazione, siccome $999999 = 1000000 - 1$, così la nostra espressione (2) si cangia in

$$\frac{44\,(1000000 - 1) + 47619}{99999900},$$

e sviluppando la parentesi

$$\frac{44000000 - 44 + 47619}{99999900},$$

ed eseguendo i calcoli, otteniamo come sopra la frazione $\frac{44047575}{99999900}$.

173. Per esercizio metteremo qui annesso il tipo del calcolo di altre due frazioni periodiche miste.

1.ª 0,153 . 072 . 072 . 072 . . .

$$\frac{153 \times 999 + 72}{999000} = \frac{153\,(1000 - 1) + 72}{999000}$$

$$\frac{153000 - 153 + 72}{999000} = \frac{152919}{999000}$$

999000	
152919	6
81486	1
71433	1
10053	7
1062	9
495	2
72	6
63	1
9	7
0	

e $$0{,}153\,.\,072\,.\,072\,\ldots = \frac{152919}{999000} = \frac{16991}{111000}.$$

2.ª 0,21 . 36 . 36 . 36 . . .

$$\frac{21 \times 99 + 36}{9900} = \frac{21\,(100 - 1) + 36}{9900}$$

$$\frac{2100 - 21 + 36}{9900} = \frac{2115}{9900}$$

9900	
2115	4
1440	1
675	2
90	7
45	2
0	

e $$0{,}21 \,.\, 36 \,.\, 36 = \frac{2115}{9900} = \frac{47}{220}.$$

Digitized by Google

PARTE SECONDA

CAPITOLO I.

FORMAZIONE DELLE POTENZE, ED ESTRAZIONE DELLE RADICI QUADRATE E CUBICHE DEI NUMERI

174. Abbiamo veduto (n.i 96, 97, 98 e 99) cosa si deve intendere per potenza e radice in generale, per *quadrato*, *cubo*, *radice quadrata e cubica* in particolare. In questo punto tratteremo di queste questioni più in generale.

Si formano le diverse potenze di un numero, e specialmente la 2.a, 3.a, 4.a, ec. moltiplicando questo numero in se medesimo 1, 2, 3, ec. volte. Le nove potenze dei primi nove numeri si trovano riunite nella seguente tavola, e le abbiamo ottenute col metodo indicato.

1.a	2.a	3.a	4.a	5.a	6.a	7.a	8.a	9.a
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489

La prima cosa degna di osservazione si è, che allorquando dovremo formare una potenza molto elevata, non sarà necessario di passare successivamente dal quadrato al cubo, dal

cubo alla quarta potenza, dalla quarta potenza alla quinta, ec. . . . .

Infatti se $4^3 = 4^2 . 4$, sarà $4^4 = 4^3 . 4 = 4^2 . 4 . 4 = 4^2 . 4^2$; $4^5 = 4^4 . 4 = 4^3 . 4 . 4 = 4^3 . 4^2$; $4^6 = 4^5 . 4 = 4^4 . 4 . 4 = 4^4 . 4^2 = 4^3 . 4^2 . 4 = 4^3 . 4^3 = 4^2 . 4 . 4^3 = 4^2 . 4^4$; ec. Così, per esempio, per formare la 13 potenza del 4 potremo moltiplicare il cubo della quarta potenza di 4 per 4; ovvero il quadrato della quinta potenza di 4 pel cubo di 4: Infatti

$4^{13} = 4^4 . 4^4 . 4^4 . 4$, ed ancora $4^{13} = 4^5 . 4^5 . 4^3$,

da ciò si deduce questo teorema, che il prodotto *di due, tre, quattro, cinque, ... potenze di uno stesso numero, è uguale a quella potenza del medesimo numero che avesse per grado la somma dei gradi di tutte le potenze moltiplicate.*

175. Le potenze delle frazioni si formano nel modo stesso, come si formano quelle dei numeri interi. Così

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 4} = \frac{3^2}{4^2},$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^2}{4^2} \times \frac{3}{4} = \frac{3^3}{4^3},$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{3^3}{4^3} \times \frac{3}{4} = \frac{3^4}{4^4}, \text{ ec.}$$

Dal che deducesi, che *per elevare una frazione ad una data potenza bisogna elevare alla potenza medesima il numeratore e il denominatore di questa frazione.*

Del rimanente senza trattenermi a dimostrare altre proprietà delle potenze, per verità utili, ma più d'attenenza dell'Algebra che dell'Aritmetica, poichè in sostanza per gli usi di quest'ultima basta di sapere elevare ad una data potenza un dato numero, questione la quale, come abbiamo veduto, non trattasi per risolverla, che di moltiplicare il numero dato per se medesimo un certo numero di volte. Passiamo piuttosto a trattare di un'altra questione più importante qual'è quella.

176. Essendo dato un numero considerato come una data potenza, trovarne la radice.

Questa seconda questione è molto più difficile, e domanda per essere risoluta delle regole particolari, perchè quantunque ogni numero possa essere elevato al quadrato, al cubo ec. non è vero reciprocamente che ogni numero sia nn quadrato, un cubo esatto.

Per procedere con regolarità cominceremo dal dare le regole per estrarre le radici quadrate, quindi le cube, essendo queste di un nso indispensabile nell'Aritmetica.

Allorchè si trattò della divisione si vide che essa era nn operazione inversa della moltiplicazione, cioè che dato nn numero che si consideri come un prodotto ed un altro numero che si consideri come un fattore del primo, si trattava di trovarne l'altro fattore. Ora al paragrafo (n.° 96) si stabilì che se i due fattori di un prodotto sono uguali, il prodotto dicesi *quadrato* e i suoi due fattori *radici quadrate*. E poichè fare un quadrato è lo stesso che fare un prodotto, così dobbiamo ora esaminare se dato un numero che si consideri come un quadrato se ne possa avere la radice quadrata per mezzo della divisione.

Quando è dato un prodotto ed uno dei suoi fattori, si trova l'altro fattore per mezzo della divisione, e si trova perchè si conosce uno dei fattori, ma quando è dato un quadrato e che vogliamo la sua radice, allora essendo iguoti i fattori che hanno prodotto questo quadrato, è ancora impossibile di riconoscere quali sono i fattori che lo hanno prodotto per mezzo della sola divisione. Laonde per avere la radice quadrata di un numero ci conviene partire da altre considerazioni. Ora sapendo che non tutti i numeri possono essere quadrati, non sempre quel numero che considereremo come un quadrato sarà realmente un quadrato, ed allora sarà impossibile di avere la radice esatta poichè non esiste. Cominceremo perciò dal risolvere le questioni in cui il dato nnmero sia realmente un quadrato, e quindi faremo conoscere come potremo contenerci per i numeri che non sono quadrati esatti.

177. Esponiamo frattanto il seguente teorema il quale è degno di osservazione.

Un numero intero che non è il quadrato di un altro nu-

mero intero, non può avere per radice neppure un numero frazionario esatto.

Abbiamo (n.° 101) stabilito che *ogni numero che divide esattamente un altro numero, divide ancora un multiplo qualunque di questo secondo numero;* questo principio è identico col seguente. *Ogni numero intero che divide esattamente uno dei fattori del prodotto, divide necessariamente il prodotto.* Premesso ciò, perchè un numero frazionario esatto possa riguardarsi come la radice quadrata di un numero intero, bisogna che il suo quadrato sia un numero intero. Ora ciò è impossibile, poichè supposto, il che è sempre permesso, che i due termini del numero frazionario siano ridotti alla sua più semplice espressione, i quadrati di questi due termini non hanno altri fattori primi che quelli che entrano nei termini medesimi; e poichè questi due numeri sono primi fra loro, lo sono ancora i quadrati. Così il numero frazionario che risulta dopo l'elevazione a quadrato dei suoi due termini è un *numero frazionario irriducibile*, e non può per conseguenza essere uguale ad un numero intero.

178. La prima cosa necessaria a sapersi quando da un numero dato si vuole estrarre la sua radice è di conoscere quante cifre dovrà avere la radice. Facciamo pertanto i quadrati di tutti i numeri rappresentati da una sola cifra, scrivendo questi quadrati per ordine in una stessa linea sotto ciascuna delle loro radici

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81

Dall'esame di queste due linee si riconosce che i numeri composti di una sola cifra non hanno per quadrato verun numero composto di più di due cifre, e se si fà il quadrato del numero 10 che è il più piccolo di tutti i numeri rappresentati da più di una cifra, ne risulta il numero 100 che appunto è il più piccolo numero di tre cifre. Onde è manifesto che *se un numero che si considera come un quadrato, è rappresentato da una sola cifra, o da due sole cifre, avrà sempre una sola cifra alla radice.*

Poichè il quadrato di 10 è 100, e che 10 essendo il più

piccolo di tutti i numeri rappresentati da due cifre, e 100 il piccolo di tutti i numeri rappresentati da tre cifre, così un numero quadrato rappresentato da tre cifre deve avere almeno due cifre alla sua radice. Ma poichè il quadrato di 100 è 10000, e 100 essendo il più piccolo di tutti i numeri rappresentati da tre cifre, e 10000 il più piccolo di tutti i numeri rappresentati da cinque cifre, così ogni numero quadrato che non sia nè uguale nè maggiore di 10000 non può avere tre cifre alla sua radice, cioè ogni numero quadrato che sia minore di 10000 e che sia pure uguale o maggiore di 100 deve avere necessariamente due cifre alla sua radice E poichè ogni numero minore di 10000 è rappresentato da tre o da quattro cifre, e non più, così *se un numero che si considera come un quadrato, è rappresentato da cinque sole cifre, o da sei sole cifre, avrà sempre tre cifre alla sua radice.*

179. Così continuando si vedrà in generale che *se un numero quadrato è rappresentato da due o da quattro cifre, ec. cioè da un numero pari di cifre, esso ha sempre un doppio numero di cifre che non ne ha la sua radice; e se un numero quadrato è rappresentato da una cifra o da tre cifre, ec. cioè da un numero dispari di cifre, esso ha sempre un doppio numero di cifre che non nè ha la sua radice meno una.* Così, per esempio, se il quadrato ha 14 cifre, la sua radice ne avrà 7; e se il quadrato ha 15 cifre, la sua radice avrà 8 cifre.

180. Dopo avere imparato a conoscere quante cifre dovrà avere la radice quadrata di un numero dato, esaminiamo le operazioni che si fanno per avere i quadrati.

I quadrati, che hanno la radice rappresentata da una sola cifra, essendo così pochi, ed essendo già stati esposti di sopra, osserveremo soltanto rispetto ad essi che fra tutti i numeri rappresentati da una o da due sole cifre, i soli numeri 1, 4, 16, 25, 36, 49, 64, 81 sono e possono considerarsi come quadrati, di modo che mentre si può aver subito la radice da questi numeri, da tutti gli altri numeri rappresentati da una cifra non si può avere veruna radice quadrata esatta perchè non esiste.

181. Avendo veduto che vi sono dei numeri che non sono quadrati esatti, ne viene la conseguenza che non possiamo neppure trovarne la radice esatta. Il numero 2, per esempio,

non è un quadrato, perchè il quadrato di 1 è 1 e il quadrato di 2 è 4. Non essendovi altri numeri interi intermediarii non possiamo trovare un numero intero, e nemmeno frazionario (n.° 177), che moltiplicato per se medesimo produca 2, vale a dire che la radice quadrata di 2, non ha alcuna misura comune coll'unità. Si chiamano queste radici *irrazionali o incommensurabili.*

182. Trattiamo adesso di formare il quadrato di un numero composto di più cifre. Sia, per esempio, il numero 54

54
54
———
16 ..... *quadrato dell' unità*
20 ..... *prodotto delle diecine per le unità*
20 ..... *prodotto delle unità per le diecine*
25 ..... *quadrato delle diecine*
———
2916 .... *quadrato di* 54.

Dopo avere scritto il moltiplicando e il moltiplicatore, come si vede sopra, si moltiplica, come per ordinario, il 4 superiore pel 4 inferiore, il che evidentemente produce il *quadrato dell' unità.*

Quindi si moltiplica il 5 superiore pel 4 inferiore, il che fa *il prodotto delle diecine per le unità.*

Si passa dopo di ciò alla seconda cifra del moltiplicatore, e si moltiplica il 4 superiore pel 5 inferiore, ciò che fa il prodotto delle unità per le diecine, ovvero (n.° 35) *il prodotto delle diecine per le unità.*

Finalmente si moltiplica il 5 superiore, pel 5 inferiore, il che fa *il quadrato delle diecine.*

Si aggiungono questi prodotti e si ha per quadrato di 54 il numero 2916, che vediamo perciò comporsi *del quadrato delle diecine, più due volte il prodotto delle diecine per le unità, più il quadrato delle unità* del numero 54.

183. Ciò che abbiamo osservato in questo quadrato essendo una conseguenza immediata delle regole della moltiplicazione, non appartiene solo al numero 54, ma bensì a qualunque altro numero composto di diecine e unità; di modo che si può dire in generale che il quadrato di qualunque numero composto

di due parti conterrà le tre parti che abbiamo enunciate, cioè *il quadrato della prima parte, più il quadrato della seconda parte, e più il doppio prodotto della prima parte per la seconda.*

184. Mediante questo teorema potremo determinare qual sia in generale la differenza de' quadrati di due numeri consecutivi.

Sieno i due numeri 17 e 18; il quadrato di 17 si esprime con 17^2; quello di $18 = 17 + 1$ esprimesi da $18^2 = 17^2 + 17 . 2 + 1$; la differenza di queste due espressioni è $17 . 2 + 1$; dunque *la differenza de' quadrati di due numeri consecutivi è uguale al doppio del più piccolo di essi aumentato dell' unità.*

Così essendo cognito il quadrato dell' unità, il quale è 1, potremo determinare i quadrati di tutti i numeri, poichè avremo

$$2^2 = 1 + 2 + 1 = 4$$
$$3^2 = 4 + 4 + 1 = 9$$
$$4^2 = 9 + 6 + 1 = 16$$
$$5^2 = 16 + 8 + 1 = 25$$
$$6^2 = 25 + 10 + 1 = 36$$
$$7^2 = 36 + 12 + 1 = 49$$
$$8^2 = 49 + 14 + 1 = 64$$
$$9^2 = 64 + 16 + 1 = 81$$

e così di seguito.

Stabiliti questi principii passiamo a trovare la radice quadrata da un numero composto di un qualunque numero di cifre.

185. Se si trattasse adesso di formare il quadrato di un numero di due cifre, per esempio 79, in vece di moltiplicare, 79 per 79, il che produrrebbe 6241, si potrebbe ancora formare le tre parti di cui questo quadrato è composto e la loro addizione darebbe il quadrato. Si avrebbe in questo caso per il quadrato delle 7 diecine 49, per il quadrato delle unità 81, e pel doppio prodotto delle diecine 7 nelle 9 unità $2 \times 7 \times 9 = 126$; quindi osservando che il quadrato delle diecine è dell' ordine delle centinaia, e che il doppio prodotto delle diecine nelle unità è dell' ordine delle diecine, si avrebbe aggiungendo insieme le tre parti.

$$7 \times 7 \times 100 = 4900$$
$$2 \times 7 \times 9 \times 10 = 1260$$
$$9 \times 9 = 81$$
$$79^2 = 6241$$

Questa costruzione c'insegna, che il quadrato della cifra delle diecine, non ha cifre significative nelle unità e nelle diecine e che esso è esclusivamente contenuto nelle cifre delle centinaia e delle migliaia, allorchè vi sono delle migliaia, o solamente in quelle delle centinaia nel caso contrario. Per esempio, il quadrato delle diecine della radice del numero 576 è contenuto nella cifra 5, e il quadrato delle diecine della radice del numero 4489 è contenuto nelle cifre 44.

186. Premesso ciò, per estrarre, per esempio, la radice quadrata del numero 4489, poichè sappiamo che il quadrato delle diecine di questa radice è contenuto nelle due ultime cifre 44, cerchiamo con l'aiuto della tavola delle potenze qual'è il più gran quadrato contenuto in 44, la sua radice sarà la cifra delle diecine del numero cercato.

Ora nella colonna delle seconde potenze il numero che si avvicina di più in meno a 44 è 36 di cui la radice è 6; 6 è dunque la cifra delle diecine della radice quadrata di 4489.

Le diecine essendo trovate si tratta adesso di trovare le unità. Osserviamo perciò, che sottraendo 36 da 44 il resto 8 si compone delle centinaia provenienti dal doppio prodotto delle diecine per le unità della radice, e che scrivendo accanto di questo resto 8, le due prime cifre di 4489, il numero 889 che ne risulta, è semplicemente ciò che resta del numero proposto 4489 dopo avervi sottratto 3600 quadrato di 60. Questo resto 889 contiene perciò ancora le due altre parti del quadrato intero, cioè il doppio prodotto delle diecine per le unità della radice, più il quadrato di queste unità.

Ma il doppio prodotto delle diecine per le unità non ha cifre significative dell'ordine delle unità, egli è dunque unicamente contenuto nelle due ultime cifre 88 del resto 889; dunque dividendo 88 per il doppio delle diecine o per 12, si deve trovare le unità; 88 diviso per 12 dà 7, così la radice quadrata di 4489 è 67. Per assicurarcene, osserviamo

ancora che il resto di 88 diviso per 12, vale a dire 4, non può provenire che dalle diecine del quadrato delle unità della radice, e che scrivendo accanto di questo resto l'ultima cifra 9 del numero proposto, il risultamento 49 è ciò che resta di questo numero dopo averne sottratto successivamente il quadrato delle diecine della sua radice e il doppio prodotto delle diecine per le unità della sua radice. Questo resto deve dunque essere il quadrato delle unità se la radice è esatta. 49 è infatti il quadrato di 7. Ecco il tipo del calcolo:

	44 . 89	6 *diecine della radice*
	36	
1.° resto	8	
	88 . 9	12 *divisore* = 2 × 6
	84	7 *unità della radice*
2.° resto	4	
	49	
	49 *quadrato della unità*	
	0	

Dopo avere scritto il numero 4489, si separano con un punto le due prime cifre a destra: si cerca la radice delle cifre a sinistra 44. Questa radice è 6, che si scrive alla destra di 4489. Si sottrae da 44 il numero 36 quadrato di 6, ed accanto del resto 8 si scrivono le due rimanenti cifre 89. Si separa con un punto la prima cifra 9 del resto generale 889, e si dividono le due prime cifre 88 per 12, doppio della cifra 6 precedentemente trovata. Questa divisione dà 7 per quoziente e 4 per resto; accanto di questo resto 4 si scrive la rimanente ultima cifra 9 che dà 49, dal quale si sottrae 49 quadrato di 7; il resto essendo 0, se ne conclude che 67 è la radice quadrata di 4489.

187. Cerchiamo ancora la radice quadrata di 576.

5 . 76	2 *diecine della radice*
4	
17 . 6	4 *doppio delle diecine*
16	4 *unità della radice*
16	
16	
0	

Avendo separato le due prime cifre a destra, cercheremo la radice quadrata di 5; questa è 2. Scriveremo 2 alla radice, e sottrarremo da 5 il numero 4 quadrato di 2 e accanto del resto uno abbasseremo 76. Separando con un punto la prima cifra 6, divideremo le due ultime 16 per 4 doppio di 2; il quoziente sarà 4, cifra delle unità della radice, e il resto 1; accanto di questo resto abbasseremo 6, e sottrarremo da 16 il quadrato 16 di 4. Il resto essendo 0, la radice quadrata di 576 è esattamente 24.

188. Allorchè il numero proposto non ha una radice esatta, la radice trovata è allora quella del più gran quadrato contenuto in questo numero, e l'operazione lascia un resto. Si abbia, per esempio, da estrarre la radice quadrata dal numero 8988.

89 . 88	9 *diecine*
81	
89 . 8	18
72	4 *unità*
178	
16	*quadrato di* 4
162	*resto finale.*

L'operazione eseguita secondo il metodo prescritto dà per ultimo resto 162. Così il numero proposto non è un quadrato perfetto. Infatti il quadrato di 94 è 8836, e quello di 95 è 9025, numero che supera 8836 di 189 ossia di $94 \times 2 + 1$ (n.° 184).

Così quando un numero non è un quadrato perfetto, il processo fa conoscere *la radice del più gran quadrato contenuto in questo numero*, ovvero ancora *la parte intera della radice quadrata di questo numero.*

Vedremo quanto prima come si ottiene approssimativamente la frazione che deve completare la radice.

189. Per estendere questo processo ai numeri composti di più di 4 cifre, basta considerare le diecine della radice cercata, che sono allora composte esse medesime di unità e di diecine, come se non formassero che un tutto il di cui quadrato non avesse cifre significative dell'ordine delle unità, nè di quello delle diecine. Si toglie allora le due prime cifre del numero proposto, e si estrae la radice dalle altre. Facendo il medesimo ragionamento sopra queste ultime, siamo portati a toglier loro due cifre a destra ed a cercare la radice quadrata del resto, e così di seguito fino a tanto che non restino che due sole cifre a sinistra. Prendiamo per esempio il numero 10504081.

La radice di questo numero sarà composta di diecine e di unità, e sappiamo che il quadrato delle diecine non può avere cifre significative negli ordini al disotto delle centinaia. Così bisognerà, per trovare queste diecine, estrarre la radice quadrata da 105040.

Ma la radice di quest'ultimo numero sarà essa medesima composta di unità e di diecine, e il quadrato di queste diecine è contenuto nelle cifre 1050 che rimangono dopo avere sottratto le due prime 40. Per trovare queste diecine bisogna dunque estrarre la radice quadrata da 1050.

La radice di 1050 è ancora composta di unità e di diecine, e il quadrato di quest'ultime diecine, le quali sono le più alte diecine della radice cercata, è contenuto nelle due ultime cifre dieci.

Così la questione si riduce a trovare prima la radice di 1050, il che si eseguirà come segue.

10 . 50 | 3 *diecine della radice*
9

15 . 0 | 6 *doppio delle diecine*
12 | 2 *unità della radice*

30
4

Resta ... 26

se accanto del resto 26 si scrivono le due cifre 40 separate ultimamente da 105040, il numero 2640 sarà ciò che rimane di 105040 dopo aver sottratto il quadrato delle diecine 52 della sua radice. Per trovare le unità di questa radice, operiamo dunque sul resto 2640 come se le diecine non avessero che una cifra

264 . 0 | 64 *doppio delle diecine*
256 | 4 *unità della radice*

80
16

Resta ... 64

La radice di 105040 è dunque 324 con un resto 64. Scriviamo adesso accanto del numero 64 le due cifre 81, separate da principio dal numero 10504081, ed il risultamento 6481 sarà ancora evidentemente ciò che rimane del numero 10504081 dopo averne sottratto il quadrato delle diecine 324 della sua radice.

Troveremo dunque infine le unità di questa radice operando sopra questo resto 6481, come se le diecine 324 non avessero che una cifra.

648 . 1 | 648 *doppio della radice*
648 | 1 *unità della radice*

1
1

0

l'operazione dando 0 per resto, la radice quadrata di 10504081 è esattamente 3241.

190. Nel seguente esempio disporremo i calcoli come si fa ordinariamente. Si abbia da trovare la radice quadrata del numero 78545682.

	78 . 54 . 56 . 82	8862.... *radice*
	64	16.....1.° *divisore*
		176....2.° *divisore*
Primo resto.....	145 . 4	1772...3.° *divisore*
	128	
	174	
	64	
Secondo resto.....	1105 . 6	
	1056	
	496	
	36	
Terzo resto.....	4608 . 2	
	3544	
	10642	
	4	
Ultimo resto.....	10638	

Avendo diviso il numero 78545682 in gruppi di due cifre cominciando dalla destra, si cerca la radice dell'ultimo gruppo 78. Questa radice è 8, che si scrive alla destra.

Dopo aver sottratto da 78, 64 quadrato di 8, si abbassa accanto del resto 14 il gruppo seguente 54, il che dà 1454: si separa l'ultima cifra 4 per mezzo di un punto e si dividono le tre prime per 16, doppio della prima cifra trovata della radice: il quoziente è 8 che si scrive alla radice, alla destra della cifra di già trovata.

Accanto del resto 17 della divisione si abbassa la cifra separata 4, il che dà 174, dalla quale si sottrae 64, quadrato dell'ultima cifra trovata 8: si ha per resto 110; accanto di questo resto si abbassa il gruppo seguente 56, poi si separa una cifra dal risultamento 11056 e si dividono le ultime 1105

per 176 doppio delle due prime cifre trovate della radice. Questa divisione dà 6 per quoziente, che si scrive alla destra delle cifre della radice, e 49 per resto, accanto del quale si abbassa la cifra separata 6; si sottrae da 496 il quadrato 36 della cifra 6 che abbiamo trovato, quindi accanto del resto 460 si abbassa l'ultimo gruppo 82; si separa con un punto la prima cifra 2 del numero 46082 e si divide le 4 ultime per 1772, doppio delle tre prime cifre trovate della radice. Questa divisione dà 2 per quoziente, che si scrive alla radice, e 1064 per resto: si abbassa accanto di questo resto la cifra separata 2 e dal risultamento 10642 si sottrae 4, quadrato dell'unità della radice e si ha per ultimo resto 10638.

La radice cercata è dunque 8862 in meno di un'unità presso a poco.

191. Nella pratica possiamo ancora abbreviare l'operazione, come si vedrà nel seguente esempio. Si abbia da estrarre la radice quadrata dal numero 17698849.

```
17 . 69 . 88 . 49 | 4207
16                | 82      8407
                  |   2        7
 169              |  164    58849
 164
   5884 . 9 .
   58849
      0
```

Comincio dall'estrarre la radice da 17; trovo 4 che scrivo alla destra del numero dato: sottraggo quindi da 17 il 16 quadrato di 4, il che dà 1 per resto accanto del quale si abbassa il gruppo seguente 69; si separa l'ultima cifra a destra del 169, poi dividendo 16 per 8, doppio della radice di già trovata, si ha per quoziente 2 che si scrive alla destra di 4 e alla destra di 8, e al di sotto ancora di 82; quindi si moltiplica 82 per 2, e si sottrae il prodotto 164 da 169 (e con ciò non solo abbiamo sottratto il doppio delle quattro diecine per 2, ma ancora il quadrato di 2); 42 rappresenta allora la collezione delle diecine della radice del numero 176988.

Per ottenere le unità, si abbassa accanto del resto 5

il gruppo 88, il che dà 588 dal quale si separa l'ultima cifra 8. Dividendo 58 per 84 doppio della radice di già trovata, si trova 0 per quoziente, il che indica che mancano le unità nella radice del numero 176988; si scrive perciò 0 accanto alla radice 42; 420 esprime allora il numero totale della radice domandata.

Finalmente, per avere la cifra delle unità, si abbassa accanto del resto 588 l'ultimo gruppo 49; poi facendo astrazione dall'ultima cifra, si divide la parte a sinistra 5884 per 840, doppio della radice di già trovata; viene per quoziente 7 che si scrive alla destra di 420 e di 840, e al di sotto ancora.

Moltiplicando 8407 per 7, e sottraendo il prodotto 58849 si ottiene 0 per resto. Dunque 4207 è la radice domandata. Per verificare l'operazione basta moltiplicare 4207 per se medesimo, secondo le regole della moltiplicazione.

Osserveremo che dalla natura del processo adoperato per estrarre la radice quadrata da un numero, si rileva che il numero delle cifre della radice è uguale al numero dei gruppi di due cifre che si possano formare nel numero proposto.

192. Dall'esposto processo possiamo dedurre la seguente regola generale nella pratica per estrarre la radice quadrata da un numero qualunque.

1.° *Bisogna dividere il numero dato in gruppi di due cifre andando da destra a sinistra.*

2.° *Cercare il più gran quadrato contenuto nelle cifre dell'ultimo gruppo per mezzo della tavola delle potenze* (n.° 174). *La radice di questo più gran quadrato sarà la cifra dell'ordine il più elevato della radice cercata.*

3.° *Accanto della differenza che si ottiene sottraendo dall'ultimo gruppo il più gran quadrato che vi si trovi contenuto, abbassare il gruppo seguente, separare l'ultima cifra per mezzo di un punto; poi dividere la parte a sinistra di questa cifra pel doppio della radice di già trovata: scrivere il quoziente accanto del doppio della radice; moltiplicare il numero così formato per questo quoziente e sottrarre il prodotto del primo resto seguito dal secondo gruppo.*

4.° *Si abbassa accanto del nuovo resto di queste sottrazione il nuovo gruppo, si separa quindi l'ultima cifra sopra*

la destra, e si dividono le altre pel doppio della radice di già trovata; si scrive il quoziente accanto di questa doppia radice, quindi si moltiplica il numero così formato pel quoziente, e si sottrae il prodotto dal secondo resto seguito dal terzo gruppo.

E così di seguito fino a tanto che non si siano esauriti tutti i grupppi.

Si otterranno successivamente così tutte le cifre della radice, avendo cura di diminuire i quozienti allorchè essi sono troppo grandi, e di porre uno zero allorchè la parte a sinistra si trova minore del doppio della radice di già trovata.

Osservazioni sopra i resti

193. Se l'operazione è stata bene eseguita, il resto ultimo dev'essere precisamente quel numero del quale il dato numero supera il più gran quadrato compreso nel detto numero; e poichè sappiamo (n.° 184) che la differenza fra un quadrato e il quadrato immediatamente maggiore è uguale a due volte la radice del quadrato minore più 1, così l'ultimo resto dell'operazione dev'essere minore di due volte la radice trovata più 1; altrimenti nel numero dato ci sarebbe compreso un quadrato maggiore di quello di cui si è trovato la radice. Quindi se l'ultimo resto dell'operazione è minore del doppio della radice trovata più 1, la radice trovata è la vera, nè la cifra che numera le unità della radice è minore della vera.

Se l'ultimo resto risultasse uguale al doppio della radice più uno, sarebbe precisamente uguale alla differenza fra il quadrato della radice trovata e il quadrato immediatamente superiore: e siccome questo resto è pure la differenza fra il quadrato della radice trovata e il numero dato; così in tal caso il dato numero sarebbe un quadrato, e la radice trovata sarebbe minore della vera, essendo però minore di una sola unità.

Finalmente se l'ultimo resto fosse maggiore del doppio della radice trovata più uno, sarebbe compreso nel numero dato un quadrato maggiore di quello di cui si è trovata la radice, e quindi si dovrebbe aumentare di una o più unità la cifra che numera le unità alla radice, finchè si ottenga per

resto dell' operazione un numero minore del doppio della radice, più uno.

194. Abbiamo veduto nell' estrarre la radice quadrata dai numeri interi, che non tutti sono quadrati esatti, e non è perciò possibile di averne neppure l' esatta radice; ma bensì egli è sempre possibile di approssimarsi al vero valore della radice di tanto quanto si vuole.

Il seguente metodo che esporremo è quello che dà la radice quadrata per approssimazione di un numero intero qualunque.

Allorchè il numero, dal quale ci proponiamo di estrarre la radice, non è un quadrato perfetto, non possiamo, come abbiamo detto, trovare la radice esatta, ma bensì potremo spingere l' approssimazione quanto vorremo. Si comincia dall' estrarre la radice del più gran quadrato contenuto nel numero proposto, e se vogliamo avere la radice con più precisione, ci serviamo dei decimali.

Si voglia, per esempio, estrarre la radice dal numero 342, la quale non differisca dal vero valore che di un centesimo circa.

Siccome voglio avere la radice che non differisca dal vero valore che di un centesimo, così dopo che avrò tolto il maggior quadrato contenuto in 342, per spingere più innanzi l'operazione e avere i decimi e centesimi, aggiungerò al resto, che otterrò, quattro zeri, operazione che potrò farla ancora da principio aggiungendoli accanto al numero 342, che equivale a moltiplicare il numero 342 per 10000. Dunque (n.° 179) la radice che otterrò con questo metodo sarà 100 volte più grande, laonde per renderle il suo giusto valore, separerò per mezzo di una virgola due cifre a destra della radice, vale a dire la renderò cento volte più piccola, e con ciò verrò a compensare la moltiplicazione fatta del numero 342 per 10000, ed avrò la radice fino ai decimi e centesimi.

Tipo del Calcolo

```
3 . 42 . 00 . 00 | 18,49
                 |-----------------------
1                |28    364    3689
-----            |  8     4       9
24.2             |-----  -----  -------
224              |224   1456   33201
-----
 180.0
 1456
 -----
  3440.0
  33201
  -------
   1199
```

Se si volesse una maggiore approssimazione, si metterebbero ancora due zeri accanto dell' ultimo resto, e si continuerebbe l' operazione. La ragione è evidente dopo quello che abbiamo detto (n.° 179), poichè tutte le volte che si mettono due zeri accanto all' ultimo resto si rende il quadrato cento volte più grande di quello che non è, e per conseguenza la radice 10 volte più grande; ma situando la cifra dopo la virgola essa si trova dieci volte più piccola; dunque, ec.

195. Si domandi per secondo esempio la radice approssimata di 2 con quattro decimali, vale a dire approssimata fino ai dieci millesimi.

Tipo del Calcolo

```
2      | 1,4142....
1      | 24   281    2824   28282
-------  4     1       4       2
10.0     ----  ----  -----  -----
 96      96    281   11296  56564
 ----
  40.0
  281
  ----
  1190.0
  11296
  -----
    6040.0
    56564
    ------
      3836
```

Senza mettere gli zeri accanto del 2, mi contento di aggiungerne due accanto di ciascun resto della radice, dopo averne estratti gli interi, e procedo sempre con la medesima regola.

195. Nei casi che abbiamo trattato non erano dati che numeri interi; supponiamo adesso che si voglia estrarre la radice quadrata da una frazione decimale, ovvero da un numero frazionario qualunque.

1.° Caso. *Sia proposto di estrarre la radice quadrata dal numero* 3,731.

```
3,7310 | 1,931
1      | 29   383   3861
-------  9     3      1
27.3     ---  ----  -----
261      261  1149  3861
 ----
  121.0
  1149
  -----
    610.0
    3861
    -----
    2239
```

Comincio da estrarre la radice quadrata dal numero intero 3, e siccome tre soli sono i decimali nel numero dato e per ogni cifra che devo avere in radice è necessario che abbassi accanto al resto due cifre del numero dato, così aggiungo uno zero alla destra dei millesimi, e il numero dato 3,731 si cangia in 3,7310: dopo di che seguito l'operazione come abbiamo detto di sopra.

Questi esempi bastano per far comprendere l'utilità dei decimali nella ricerca delle radici approssimate dei numeri che non sono quadrati perfetti.

197. Regola generale. *Per estrarre la radice quadrata per approssimazione da una frazione decimale unita a degli interi si comincia a fare la divisione in gruppi di due cifre dall'unità degli interi, e si prosegue al solito verso la sinistra, e quindi si separano in gruppi di due per due anche i decimali, supplendo con uno zero finale nel caso che si trovino essere di numero impari, nel rimanente si fa l'estrazione della radice come se si trattasse di numeri interi, e soltanto i decimali in radice dovran cominciarsi a computare allorchè esauriti i gruppi degli interi abbasseremo il primo gruppo dei decimali.*

198. 2.° Caso. Per valutare in decimali la radice quadrata di un numero frazionario qualunque, *si riduce in primo luogo il numero in decimali e ciò col processo del* (n.° 156), *e si spinge tanto avanti l'operazione da avere due volte tante cifre decimali quante si vuole averne alla radice quindi si opera come nel caso precedente.*

Si abbia per esempio da estrarre la radice quadrata del numero $\frac{310}{13}$, *e si voglia approssimata fino ai centesimi.*

Comincio da ridurre come abbiamo detto il numero frazionario $\frac{310}{13}$ in decimali,

$$\begin{array}{r|l} 310 & 13 \\ \cline{2-2} 50 & 23{,}8461 \\ 110 & \\ 60 & \\ 80 & \\ 20 & \\ 7 & \end{array}$$

Premesso ciò estraggo la radice quadrata secondo il consueto, e come si vede qui sotto

```
23,84 . 61 | 4,88
16         | 88   968
           |  8     8
78.4       | 704  7744
704
806.1
7744
217
```

La radice cercata per approssimazione fino a' centesimi è 4,88.

199. Per estrarre la radice quadrata da una frazione si estrae prima dal numeratore, e quindi dal denominatore, e si divide la radice del numeratore per la radice del denominatore.

In questo caso possiamo ancora ridurre la frazione ordinaria a frazione decimale e quindi estrarre la radice, come abbiamo fatto nei numeri frazionari, ovvero possiamo ancora procedere come segue.

200. Si abbia da estrarre la radice della frazione $\frac{7}{13}$.

Siccome il valore di una frazione non rimane alterato (n.° 125. 3.°) tutte le volte che si moltiplicano i due termini della frazione per un medesimo numero; così moltiplico i due termini della frazione data pel denominatore 13 ed ottengo $\frac{91}{13^2}$. Mediante quest'artifizio ho ridotto il denominatore ad un quadrato perfetto, dal quale potrò estrarne la radice esattamente, ed avrò

$$\sqrt{\frac{91}{13^2}}=\frac{\sqrt{91}}{13}.$$

Estraggo adesso con i soliti metodi la radice dal numero 91, spingendo l'approssimazione fino ai millesimi

91	9.538....		
81	185	1903	19068
	5	3	8
100.0	925	5709	152544
925			
750.0			
5709			
17910.0			
152544			
26556			

Divido adesso la radice ottenuta 9,538 per 13 ed ottengo 0,734 circa. Così la radice approssimata della frazione $\frac{7}{13}$ è 0,734 . . .

Questo processo può ugualmente applicarsi ancora ai numeri frazionari.

201. Passermo ora a stabilire il modo per estrarre la radice cuba da un dato numero. Per effettuare questa operazione fa di mestieri, a seconda di quanto si fece per la radice quadrata, di conoscer primieramente i cubi dei numeri di una sola cifra. Questi si troveranno nella seconda linea della seguente tavola

Numeri	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
Cubi ..	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000.

Ora siccome il cubo di 10 è 1000, così qualunque numero di tre cifre non contiene che il cubo di un numero di una sola cifra.

Dall'ispezione di questa tavola osserveremo frattanto, che fra i numeri di una, di due o di tre cifre, non ve ne sono che nove i quali sieno cubi perfetti; ciascuno degli altri ha per radice cubica un numero intero, più una frazione la quale non può esprimersi esattamente.

Da queste osservazioni se ne deduce la medesima conseguenza che si stabilì (n.° 180) per le radici quadrate; cioè che se vi sono dei numeri che non sono cubi esatti, non pos-

siamo neppure trovarne la radice esatta, e che ancora in questo caso queste radici si chiamano *irrazionali* o *incommensurabili*.

202. Esaminiamo se dal numero dato, per estrarre la radice cubica, potremo riconoscere quante cifre debba avere questa radice. Abbiamo veduto che i numeri composti di una sola cifra non hanno il loro cubo rappresentato da più di tre cifre, e che se si fa il cubo del numero 10, che è il più piccolo di tutti i numeri rappresentati da più di una cifra, ne risulta il numero 1000, che è rappresentato da quattro cifre. Onde è manifesto che *se un numero cubo è rappresentato da una, o da due, o da tre cifre, avrà sempre una sola cifra alla radice.*

Poichè il cubo di 10 è 1000, e 10 essendo il più piccolo di tutti i numeri rappresentati da due sole cifre, così 1000 è il più piccolo di tutti i numeri rappresentati da quattro cifre, così un numero cubo rappresentato da quattro cifre deve avere almeno due cifre alla radice. Ma poichè il cubo 100 è 1000000; e 100 è il più piccolo di tutti i numeri rappresentati da tre sole cifre, 1000000 è dunque il più piccolo di tutti i numeri rappresentati da sette sole cifre. Così ogni numero cubo che non sia nè uguale nè maggiore di 1000000 non può avere tre cifre alla sua radice, cioè ogni numero cubo che sia minore di 1000000 e che sia pure uguale o maggiore di 1000 deve avere necessariamente due cifre alla sua radice.

E poichè ogni numero minore di 1000000 e maggiore di 1000 è rappresentato solo da quattro, o da cinque o da sei cifre, così *se un numero cubo è rappresentato da quattro o da cinque, o da sei cifre, avrà sempre due cifre alla radice.*

Ragionando ugualmente, con facilità ci accorgeremo che *se un numero cubo è rappresentato da sette o da otto, o da nove cifre, avrà sempre tre cifre alla radice.* E in generale *se un numero cubo è rappresentato da tre, da sei, o da nove cifre, ec. cioè da un numero triplo di cifre, la sua radice avrà una sola cifra per ogni tre cifre. Se un numero cubo è rappresentato da due o da cinque o da otto o da undici cifre, ec. cioè da un numero triplo di cifre, più due cifre, esso avrà sempre un triplo numero di cifre meno una di quello che ne deve*

avere nella sua radice. Se un numero cubo è rappresentato da una o da quattro, o da sette o da dieci cifre, ec., cioè da un numero triplo di cifre più una cifra, esso avrà sempre un triplo numero di cifre meno due di quello che non deve avere la sua radice. E se vogliamo esprimere più chiaramente quanto abbiamo asserito, possiamo dire *che un numero cubo sia rappresentato da quante cifre si voglia, se tutte le sue cifre si separano di tre in tre cifre cominciando dalla destra; ancorchè nell'ultima separazione a sinistra restino solo due cifre ed anche una cifra sola, la radice cuba di questo numero avrà tante cifre quante separazioni si sono fatte nel numero dato.*

Per esempio, se il cubo dato avesse ventuna cifra, la radice ne avrebbe sette; se avesse ventidue cifre, la radice ne avrebbe otto, e se avesse ventitre cifre, la radice ne avrebbe pure otto.

203. Avanti di estrarre la radice cubica da un numero cominceremo dall'analizzare la legge secondo la quale si forma il cubo, che è il prodotto di un numero pel suo quadrato. Se supponiamo questo numero decomposto in due parti, abbiamo veduto (n.° 182) che il quadrato delle due parti si compone del quadrato della prima parte, più il quadrato della seconda parte, e più il doppio prodotto della prima parte per la seconda: ed è il sistema di queste tre quantità che bisogna moltiplicare per le due parti del numero dato. Da ciò si vede che se si trattasse di fare il cubo del numero 15 decomposto in due parti 9 e 6, si comincerebbe dal fare il quadrato di queste due parti con la regola esposta di sopra, il che darebbe

$$(9+6)^2 = 9^2 + 2 . 9 . 6 + 6^2 = 15^2,$$

e che per averne il cubo non sarebbe necessario che di moltiplicare le tre parti

$$9^2 + 2 . 9 . 6 + 6^2$$

per $(9+6)$, il che si eseguisce come segue; cioè si comincia dal moltiplicare le tre parti $9^2 + 2 . 9 . 6 + 6^2$ del quadrato ottenuto per 9 prima parte del numero dato e si ottengono i prodotti 1°, 2°, e 3°. Quindi moltiplicando le medesime tre parti per la seconda parte 5 del numero dato si ottengono i prodotti 4°, 5°, e 6°.

$$15^3 = (9+6)^3 = 9^3 + 2 \,.\, 9 \,.\, 6 + 6^3$$

	$9 + 6$
1.° il cubo della 1.ª parte	9^3
2.° due volte il quadrato della 1.ª × per la 2.ª	$+ 2 \,.\, 9^2 \,.\, 6$
3.° la 1.ª moltiplicata pel quadrato della 2.ª	$+ 9 \,.\, 6^2$
Egualmente moltiplicando le tre parti del quadrato per la seconda parte del numero dato, viene	
4.° il quadrato della 1.ª parte × nella 2.ª	$+ 9^2 \,.\, 6$
5.° due volte il quadrato della 2.ª × nella 1.ª	$+ 2 \,.\, 9 \,.\, 6^2$
6.° Finalmente il cubo della 2.ª .	$+ 6^3$

$$(9+6)^3 = 9^3 + 3 \,.\, 9^2 \,.\, 6 + 3 \,.\, 9 \,.\, 6^2 + 6^3$$

Riunendo questi sei risultamenti, si vede che il cubo di qualunque numero formato di due parti, si compone di quattro parti cioè

1.° *Del cubo della prima parte;*

2.° *Di tre volte il quadrato della prima parte moltiplicato per la seconda;*

3.° *Di tre volte il quadrato della seconda moltiplicato per la prima parte, e*

4.° *Del cubo della seconda parte.*

204. Dalla dimostrazione di questo teorema potremo determinare qual sia in generale la differenza dei cubi di due numeri consecutivi.

Sieno i due numeri 11 e 12. Il cubo di 11 si esprime con 11^3; quello di $12 = 11 + 1$ esprimesi da $12^3 = 11^3 + 3 \,.\, 11^2 \,.\, 1 + 3 \,.\, 1 \,.\, 11 + 1$; la differenza di queste due espressioni è $3 \,.\, 11^2 \,.\, 1 + 3 \,.\, 1 \,.\, 11 + 1$; dunque *la differenza dei cubi di due numeri consecutivi è uguale a tre volte il quadrato del più piccolo di essi, più tre volte il più piccolo numero aumentato dell' unità.*

Così essendo cognito il cubo dell' unità, il quale è 1,

potremo determinare i cubi di tutti i numeri, poichè avremo

$$2^3 = 1 + 3 + 9 + 1$$
$$3^3 = 2^3 + 3 . 2^2 + 3 . 2 + 1$$
$$4^3 = 3^3 + 3 . 3^2 + 3 . 3 + 1$$
$$5^3 = 4^3 + 3 . 4^2 + 3 . 4 + 1$$
$$6^3 = 5^3 + 3 . 5^2 + 3 . 5 + 1$$
$$7^3 = 6^3 + 3 . 6^2 + 3 . 6 + 1$$
$$8^3 = 7^3 + 3 . 7^2 + 3 . 7 + 1$$
$$9^3 = 8^3 + 3 . 8^2 + 3 . 8 + 1$$

e così di seguito.

205. Stabiliti questi principii passiamo a trovare la radice cuba di un numero composto di qualunque numero di cifre.

Se la radice non ha che due cifre, come è quella di 74 . 088, osservo che il cubo delle diecine cercate si forma facendo il cubo delle cifre delle diecine, e ponendo tre zeri alla sua destra (n.° 28). Dunque separando le tre cifre 088 del numero proposto, 74 contiene il cubo della cifra delle diecine considerate come unità semplici, ed inoltre le migliaia che provengono dall'altre parti. Il più gran cubo contenuto in 74 è (201) 64, di cui la radice è 4, e questa è la cifra delle diecine: poichè, siccome 74 è compreso fra il cubo di 4 e di 5, il numero 74088 lo è fra quello di 40 e 50.

Si tolga 64 da 74: il resto 10088 rappresenterà le tre altre parti del cubo: ora il prodotto di tre volte il quadrato delle diecine per le unità si forma moltiplicando le unità incognite per il triplo del quadrato di 4, vale a dire di 48, e ponendo inoltre due zeri alla sua destra, poichè il quadrato di un numero di diecine non può dare dell'unità di un ordine inferiore delle centinaia, perciò ne segue che il triplo quadrato delle diecine per le unità non può trovarsi che nella parte a sinistra 100 delle due ultime cifre 88, che si separano per questa ragione con un punto. Così il numero 100 conterrà il triplo prodotto 48 delle diecine per le unità, più le centinaia, prodotto delle altre due parti del cubo. Dividendo 100 per 48 il quoziente 2 che otterremo, saranno le unità, ovvero un numero troppo grande.

Si tratta adesso di verificare se 2 è troppo grande. Per eseguir ciò, sotto 4800, che è il triplo del quadrato delle diecine, mettiamo il triplo prodotto delle diecine per 2, ovvero $3 . 40 . 2 = 240$, poi il quadrato di 2 o 4, e moltiplichiamo la somma 5044 per 2. Se 2 è la cifra delle unità, il prodotto dovrà essere eguale al resto 10088: e siccome infatti $5044 \times 2 = 10088$, così 2 è la cifra delle unità, e 42 è la radice cubica esatta del numero 74088.

Tipo del calcolo

74088	42	*Radice*
64	48	*Triplo del quadrato delle diecine*
10088	240	*Triplo prodotto delle diecine per le unità*
10088	4	*Quadrato delle unità*
0	5044	
	2	
	10088	

206. Si abbia per secondo esempio da estrarre la radice cubica dal numero 456533.

Tipo del calcolo

456 . 533	77	*Radice*
343	147	
1135.33	1470	
113533	49	
0	16219	
	7	
	113533	

Operando come sopra si trova che la radice cubica domandata è 77.

Si abbia per terzo esempio il numero 21952

Tipo del calcolo

21 . 952	28 *Radice*	
8	12	12
	54	48
139.52	81	64
13952	1821	1744
0	9	8
	16389	13952

Dopo aver sottratto il cubo 8 dalle due cifre a sinistra 21, faccio il quadrato delle diecine 2 considerate come diecine, e lo triplico, il che mi dà 12; quindi cerco quante volte il 12 entra nelle tre cifre 139 a sinistra del resto; e siccome la cifra che devo ottenere per quoziente non può eccedere 9, così prendo 9 pel quoziente di 139 per 12.

Per verificare se 9 è una cifra troppo grande per le unità, sotto il 1200, che è il triplo del quadrato delle diecine, mettiamo il triplo del prodotto delle diecine per 9, ossia $3 \times 20 \times 9 = 540$; poi il quadrato di 9 o 81, e moltiplichiamo la somma 1821 per 9. Se 9 è la cifra delle unità, il prodotto dovrà essere uguale al resto, poichè in questa guisa si formano le tre parti che questo resto contiene. Questo prodotto siccome supera 13952, così la cifra 9 è troppo forte per le unità. Si tenterà dunque 8; e siccome facendo la medesima prova si trova precisamente 13952, si deduce che 28 è la radice cubica esatta del numero 21952.

207. Passiamo adesso a considerare il caso in cui la radice sia composta di più di due cifre, ed allora basta, come si fece nell'estrazione della radice quadrata, considerare le diecine della radice cercata, che sono allora composte esse medesime di unità e di diecine, come se non formassero che un tutto il di cui cubo non avesse cifre significative dell'ordine dell'unità, nè di quello delle diecine. Si toglie allora le tre prime cifre del numero proposto, e si estrae la radice dalle altre. Facendo il medesimo ragionamento sopra quest'ultime, siamo condotti a toglier loro tre cifre a destra e a cercare la radice cuba del resto, e così di seguito fino a

tanto che non restino più di tre cifre a sinistra. Prendiamo per esempio il numero 1626379776.

La radice di questo numero sarà composta di diecine e di unità, e sappiamo che il cubo delle diecine non può avere cifre significative negli ordini al di sotto delle migliaia. Così bisognerà per trovare queste diecine estrarre la radice cuba da 1626379.

Ma la radice di quest'ultimo numero sarà essa medesima composta di unità e di diecine, e il cubo di queste diecine è contenuto nelle cifre 1626 che rimangono dopo aver sottratto le tre prime cifre 379. Per trovare queste diecine bisogna perciò estrarre la radice cuba da 1626.

La radice di 1626 è ancora composta di unità e di diecine, e il cubo di quest'ultime diecine, le quali sono le più alte diecine della radice cercata, è contenuto nell'ultima cifra 1.

Così la questione si riduce a trovare prima la radice di 1626, il che si eseguirà come segue.

1 . 626	11	
1	3	*Triplo del quadrato delle diecine*
	3	*Triplo delle diecine per le unità*
626	1	*Quadrato dell' unità*
331	331	
295	1	
	331	

Se accanto del resto 295 si scrivono le tre cifre 379 separate ultimamente da 1626379, il numero 295379 sarà ciò che rimane di 1626379 dopo aver sottratto il cubo delle diecine 11 della sua radice. Per trovare le unità di questa radice operiamo dunque sul resto 295379 come se le diecine non avessero che una cifra.

295379	7	*Unità della radice*
270613	36300	*Triplo del quadrato delle diecine*
	2310	*Triplo delle diecine per le unità*
24766	49	*Quadrato delle unità*
	38659	
	7	
	270613	

La radice di 1626379 è dunque 117 con un resto 24766. Scriviamo adesso accanto al numero 24766 le tre cifre 776, il risultamento 24766776 sarà ancora evidentemente ciò che rimane del numero 1626379776 dopo averne sottratto il cubo delle diecine 117 della sua radice. Troveremo dunque le unità di questa radice operando sopra questo resto 24766776 come se le diecine 117 non avessero che una cifra.

24766776	6	*Unità della radice*
24766776	4106700	*Triplo del quadrato delle diecine*
	21060	*Triplo delle diecine per le unità*
0	36	*Quadrato delle unità*
	4127796	
	6	
	24766776	

l'operazione dando 0 per resto, la radice cuba di 1626379776 è certamente 1176.

208. Nel seguente esempio disporremo i calcoli come si fa ordinariamente. Si abbia da trovare la radice cuba del numero 100544625.

100 . 544 . 625	465	*Radice cercata*
64	4800	634800
	720	6900
365.44	36	25
33336	5556	641725
32086.25	6	5
3208625	33336	3208625
0		

Avendo diviso il numero 100544625 in gruppi di 3 cifre a cominciare alla destra, si cerca la radice dell'ultimo gruppo 100. Questa radice è 4, che si scrive alla destra dopo aver sottratto da 100 il numero 64 cubo di 4: si abbassa quindi accanto del resto 36 il gruppo seguente 544; si separano l'ultime due cifre 44 per mezzo di un punto e si dividono le tre prime per 48 triplo del quadrato della prima cifra trovata della radice: il quoziente è 6, che si scrive alla radice, alla destra della cifra di già trovata, operando del rimanente come sopra.

Accanto del resto 3208 si abbassa il gruppo seguente 625, poi si separano due cifre del risultamento 3208625 e si dividono le ultime 32086 per 6348, triplo del quadrato delle due prime cifre trovate della radice. Questa divisione dà 5 per quoziente, che si scrive alla destra delle cifre della radice, ed operando al solito si forma il numero 641725 il quale moltiplicato per 5 dà 3208625, numero precisamente uguale all'ultimo resto. Da ciò si conclude, che la radice cercata del numero 100544625 è 465.

Osserveremo che dalla natura del processo adoprato per estrarre la radice quadrata da un numero, si rileva che il numero delle cifre della radice è uguale al numero dei gruppi di tre cifre che si possano formare nel numero proposto.

Dall'esposto processo possiamo dedurre la seguente regola generale nella pratica per estrarre la radice quadrata da un numero qualunque.

1.° *Bisogna dividere il numero dato in gruppi di tre cifre, andando da destra a sinistra.*

2.° *Cercare il maggior cubo contenuto nelle cifre dell'ultimo gruppo per mezzo della tavola delle potenze* (n.° 174). *La radice di questo maggior cubo sarà la cifra dell'ordine il più elevato della radice cercata.*

3.° *Accanto alla differenza che si ottiene sottraendo dall'ultimo gruppo il maggior cubo che vi si trovi contenuto, abbassare il gruppo seguente; separare l'ultime due cifre per mezzo di un punto, poi dividere la parte a sinistra di queste cifre pel triplo del quadrato della radice di già trovata: quindi con la cifra trovata formare le altre parti del cubo, vale a dire, il triplo delle diecine moltiplicato per la cifra trovata, e il*

quadrato della cifra trovata, scrivere queste parti sotto il triplo del quadrato della radice trovata in principio, rammentandosi che la prima parte deve esprimere delle centinaia, la seconda delle diecine e la terza delle unità; moltiplicare il numero così formato pel quoziente che abbiamo ottenuto, e quindi sottrarre il prodotto dal primo resto seguito dal secondo gruppo.

4.° Si abbassa accanto del nuovo resto, che si ottiene dopo questa sottrazione, il nuovo gruppo; si separano quindi le ultime due cifre sopra la destra, e si dividono le altre pel triplo del quadrato della radice di già trovata; si opera sopra la cifra che si ottiene, e sopra quelle delle radici, come abbiamo prescritto sopra, poi si moltiplica il numero che si forma in questa guisa pel quoziente ottenuto, e si sottrae il prodotto dal secondo resto seguito dal terzo gruppo.

E così di seguito fino a tanto che non siano esauriti tutti i gruppi.

Così si otterranno successivamente tutte le cifre della radice, avendo a cuore di diminuire i quozienti allorchè essi sono troppo grandi, e di porre uno zero, e abbassare un altro gruppo quando la parte a sinistra si trova minore del triplo del quadrato della radice di già trovata.

209. Abbiamo veduto (n.° 201) che tutti i numeri non sono cubi perfetti: da ciò ne segue che non può neppure estrarsi esattamente da tutti i numeri la radice cuba, ma bensì egli è sempre possibile di approssimarsi al vero valore della radice col metodo che esporremo.

Allorchè il numero, dal quale ci proponiamo di estrarre la radice cuba, non è un cubo esatto, si comincia da estrarre la radice del maggior cubo contenuto nel numero proposto, e quindi, per approssimarsi a questa radice di quanto lo esige la natura della questione, ci serviamo dei decimali.

Si domandi, per esempio, di estrarre la radice cuba del numero 763 la quale non differisca dal vero valore che di un centesimo circa.

Siccome voglio avere la radice cuba che non differisca dal vero valore che di un centesimo, così dopo che avrò sottratto il maggior cubo contenuto in 763 per spingere più avanti l'operazione e avere i decimi e centesimi aggiungerò al resto

che otterrò sei zeri, operazione che potrò fare ancora da principio aggiungendoli accanto al numero 763, o ciò che equivale allo stesso moltiplicare il numero 763 per 1000000. Dunque la radice, che otterrò mediante questa trasformazione, sarà (n.° 202) 100 volte maggiore, laonde per renderle il suo giusto valore, separerò per mezzo di una virgola due cifre a destra della radice, vale a dire la renderò cento volte minore, e con ciò verrò a compensare la moltiplicazione che avevo fatto del numero 763 per 1000000, e ad avere in radice i decimi e centesimi.

Tipo del calcolo

763 . 000 . 000	9,13	
729	24300	2484300
	270	8190
340.00	1	9
24571	24571	2492499
94290.00	1	3
7477497	24521	7477497
1951503		

Se si volesse una maggior approssimazione, si metterebbero ancora tre zeri accanto all'ultimo resto, e si continuerebbe l'operazione. La ragione è evidente dopo quello che abbiamo detto (n.° 202), poichè tutte le volte che si mettono tre zeri accanto all'ultimo resto, si rende il cubo mille volte più grande di quello che non è, e per conseguenza la radice 10 volte più grande; ma situando la cifra dopo la virgola essa si trova 10 volte più piccola, dunque ec.

210. Nei casi che abbiamo trattato non erano dati che numeri interi. Supponiamo adesso che si voglia estrarre la radice cuba da una frazione decimale, ovvero da un numero frazionario qualunque.

1.° Caso. *Sia proposto di estrarre la radice cuba dal numero* 5,6321

5,632 . 100	1,779		
1	300	86700	9398700
	210	3570	47790
46.32	49	49	81
3913	559	90319	9446571
7191.00	7	7	9
632233	3913	632233	85019139
868670.00			
85019139			
1847861			

Comincio da estrarre la radice cuba dal numero intero, 5: e siccome quattro soli sono i decimali nel numero dato, e per ogni cifra che devo avere in radice è necessario che abbassi accanto al resto tre cifre del numero dato, così aggiungo due zeri alla destra dei dieci millesimi, e quindi il numero dato 5,6321 si cangia in 5,632100: dopo di che seguito l'operazione come abbiamo indicato sopra, avvertendo che arrivati al terzo resto e volendo una cifra di più in radice bisogna aggiungere alla destra di questo resto tre zeri, il che mi cangerà il resto 86867 in 86867000.

Questi esempi bastano per far comprendere l'utilità dei decimali nella ricerca delle radici approssimate dei numeri che non sono cubi perfetti.

211. Regola generale. *Per eserarre la radice cuba per approssimazione da una frazione decimale unita a degli interi, si comincia a fare la divisione in gruppi di tre cifre dall'unità degli interi, e si prosegue al solito verso la sinistra, e quindi si separano in gruppi di tre per tre anche i decimali, supplendo con uno o due zeri finali nel caso che il numero delle cifre decimali non sia multiplo di tre. Nel rimanente si fa l'estrazione della radice come se si trattasse di numeri interi, e soltanto i decimali in radice dovranno cominciarsi a computare allorchè esauriti i gruppi degli interi si abbasserà il primo gruppo dei decimali.*

212. 2.° Caso. Per valutare in decimali la radice cuba di un numero frazionario qualunque, *si riduce in primo luogo*

il numero in decimali col processo indicato (n.° 156), *e si spinge tanto avanti l'operazione da avere tre volte tante cifre decimali quante si vuole averne, quindi si opera come nel caso precedente.*

Si abbia, per esempio, da estrarre la radice cuba dal numero $\frac{407}{17}$, *e si voglia approssimata fino ai centesimi.*

Comincio da ridurre, come abbiamo detto, il numero frazionario $\frac{407}{17}$ in decimali, il che mi dà 23,941176.

Premesso ciò, estraggo la radice cuba secondo il consueto e come si vede qui sotto.

23,941 . 176	2,88	
8	1200	235200
	480	6720
159.41	64	64
13952	1744	241984
19891.76	8	8
1935872	13952	1935872
53304		

La radice approssimata fino ai centesimi è 2,88.

213. Per estrarre la radice cuba da una frazione si estrae prima dal numeratore, e quindi dal denominatore: si divide quindi la radice del numeratore per la radice del denominatore.

In questo caso possiamo ancora cominciare dal ridurre la frazione ordinaria a frazione decimale, e quindi estrarre la radice come abbiamo fatto nei numeri frazionari, ovvero possiamo ancora procedere come segue.

214. Si abbia da estrarre la radice cuba dalla frazione $\frac{7}{11}$.

Siccome il valore di una frazione non rimane alterato (n.° 125. 3.ª) tutte le volte che si moltiplicano i due termini della frazione data pel denominatore 11 elevato al quadrato, ottengo per conseguenza

$$\frac{11^2 \times 7}{11^3} = \frac{121 \times 7}{11^3} = \frac{847}{11^3}.$$

Mediante questo artifizio ho ridotto il denominatore ad un cubo perfetto, e dal quale perciò potrò estrarne la radice cuba esattamente, ed avrò

$$\sqrt[3]{\frac{847}{11^3}} = \frac{\sqrt[3]{847}}{11}.$$

Estraggo adesso con i soliti metodi la radice cuba del numeratore spingendo l'approssimazione fino ai millesimi.

847,000 . 000 . 000	9,461		
729	24300	2650800	268474800
1180.00	1080	16920	28380
101584	16	36	1
164160.00	25396	2667756	268503181
16006536	4	6	1
4094640.00	101584	16006536	268503181
268503181			
140960819			

Divido adesso la radice ottenuta 9,461 per 11 ed ottengo 0,860 circa: così la radice approssimata della frazione $\frac{7}{11}$ è 0,860 . . . .

Questo processo può ugualmente applicarsi ancora ai numeri frazionari.

Del rimanente tutto ciò che abbiamo detto per la radice quadrata e la radice cubica si applica ugualmente alle radici di un grado qualunque, se non che i processi per l'estrazione di queste sarebbero molto complicati, e superiori a quanto si richiede in un trattato d'Aritmetica. Ma noi daremo in seguito un metodo col quale ci metteremo in grado non solo di trovare le radici quadrate e cubiche, ma ancora quelle dei gradi superiori con la massima facilità e semplicità.

CAPITOLO II

DEI RAPPORTI E DELLE PROPORZIONI

215. Abbiamo veduto (n.° 6) che per farsi un'idea precisa di una quantità qualunque bisognava paragonarla ad un'altra quantità della medesima specie, la quale poteva prendersi o ad arbitrio o dalla natura. Il risultamento di questo paragone è ciò che noi chiamammo *numero*.

Ma se in luogo di paragonare una grandezza o quantità alla sua unità vogliamo paragonare due grandezze qualunque di una medesima specie, il che equivale a paragonare due numeri che le esprimano, *il risultamento di questo paragone* è ciò che forma quello che dicesi *rapporto o ragione* di due numeri.

In questo senso *un numero* rappresenta l'espressione del rapporto o della ragione di una grandezza alla sua unità.

Due numeri paragonati insieme non hanno che due relazioni possibili: essi sono eguali o ineguali.

L'uguaglianza di due numeri non è che una semplice identità la quale non può produrre veruna nuova condizione. La relazione $5 = 5$, per esempio, significa semplicemente che 5 è 5.

216. L'ineguaglianza di due numeri dà luogo a due considerazioni differenti:

1.° O il loro paragone ha per oggetto di sapere quanto uno di questi numeri è maggiore dell'altro, ed in questo caso la *differenza* che passa fra i medesimi ha ricevuto il nome di *rapporto aritmetico*, o di *rapporto per sottrazione*. 2.° Ovvero il loro paragone ha per oggetto di sapere quanto uno di questi numeri è contenuto nell'altro, ed allora il *quoziente* che risulta dai medesimi è ciò che chiamasi *rapporto geometrico*, *rapporto per quoziente*, o semplicemente *rapporto*.

Così il rapporto aritmetico di due numeri 6 e 3 è 3, perchè $6 - 3 = 3$, e il loro rapporto geometrico è 2 perchè $6 : 3 = 2$.

I due numeri che si paragonano, si chiamano *termini* del rapporto.

Il primo termine si chiama in particolare *l'antecedente*, e il secondo il *conseguente*. Nell' esempio di sopra 6 è l' antecedente e 3 il conseguente.

217. Allorchè si hanno due rapporti per sottrazione uguali fra di loro, il complesso di questi quattro numeri si chiama un *equi-differenza* o *proporzione aritmetica*.

Per esempio, il rapporto aritmetico dei due numeri 7 e 4 essendo il medesimo di quello dei due numeri 6 e 3, il paragone di questi rapporti dà l'eguaglianza.

$$7 - 4 = 6 - 3,$$

e questa eguaglianza è ciò che chiamasi *equi-differenza*.

L'equi-differenza si scrive ancora come segue

$$7 . 4 : 6 . 3$$

ponendo *un* punto fra il primo e il secondo termine, *due* fra il secondo e il terzo, e *uno* fra il terzo ed il quarto.

L'equi-differenza si enuncia come segue

7 sta a 4 come 6 sta a 3,

il che significa che 7 supera 4 di tante unità di quante il 6 supera il 3.

Il primo e il terzo termine di un equi-differenza si chiamano *antecedenti*: il secondo e quarto *conseguenti*. Così 7 e 6 sono gli antecedenti della nostra equi-differenza, e 4 e 3 ne sono i conseguenti.

Il primo e l'ultimo termine 7 e 3 si chiamano ancora *i due estremi*: il secondo e terzo 4 e 6 si dicono *i due medii*.

In qualunque equi-differenza la somma degli estremi è uguale a quella dei medii.

Infatti, si abbia l'equi-differenza di sopra

$$7 . 4 : 6 . 3$$

nella quale la ragione o rapporto è 3. È evidente che avremo l'antecedente 7 *uguale* 4 *più* 3, e l'antecedente 6 *uguale* 3 *più* 3, ed è perciò che la nostra equi-differenza potrà cangiarsi nell'altra

4 più 3 . 4 : 3 *più* 3 . 3.

Ora facendo la somma degli estremi, avremo $4 + 3 + 3$; e facendo quella dei medii avremo egualmente $4 + 3 + 3$: e poichè evidentemente risulta che queste due somme sono identiche, così potremo concludere la verità del nostro enunciato, cioè che *se quattro numeri enunciati o scritti sopra una medesima linea formano un equi-differenza, la somma degli estremi è uguale a quella dei medii.*

Come pure, *se la somma del primo e dell'ultimo numero è uguale alla somma del secondo e del terzo; o se la somma degli estremi è uguale a quella dei medii, i quattro numeri formano un equi-differenza*, nell'ordine in cui essi sono enunciati o scritti. Mentre se non esiste equi-differenza, neppure la somma degli estremi sarebbe uguale a quella dei medii; il che sarebbe contrario alla supposizione.

218. Dalla proprietà fondamentale dimostrata si deduce *che conoscendo tre termini di un'equi-differenza potremo sempre ottenere il quarto.* Se questo è un estremo, *sottraendo dalla somma dei medii l'estremo conosciuto*, e se è un medio, *sottraendo dalla somma degli estremi il medio conosciuto.*

Si abbia per esempio l'equi-differenza

$$27 . 13 : 19 . x,$$

Siccome la somma degli estremi è uguale a quelle dei medii, così avrò

$$27 + x = 13 + 19:$$

ora è evidente che da cose uguali sottraendo cose uguali, i resti debbono pure essere uguali, perciò potrò da ambedue i membri sottrarre il numero 27, il che mi darà

$$27 + x - 27 = 13 + 19 - 27$$

e facendo le opportune riduzioni

$$x = 5$$

ciò che dà

$$27 . 13 : 19 . 5:$$

similmente nell'equi-differenza

$$17 . 9 : x . 2$$

si ha

$$x + 9 = 17 + 2;$$

donde

$$x = 17 + 2 - 9 = 10,$$

e per conseguenza

$$17 . 9 : 10 . 2.$$

219. In un' equi-differenza i due termini medii potrebbero essere uguali, come per esempio nell' equi-differenza 12 . 8 : 8 . 4; in tal caso il primo conseguente è nel medesimo tempo secondo antecedente, e i due rapporti si congiungono in questo termine comune, che scrivesi una sola volta così

$$\div 12 . 8 . 4.$$

essa si chiama allora un' *equi-differenza continua*, ovvero *proporzione aritmetica continua.*

Ora siccome anche queste sorti di equidifferenze sono soggette alla medesima proprietà fondamentale dell' altre, così la somma degli estremi deve essere uguale alla somma dei medii, vale a dire al doppio del medio. Ne segue perciò che *questo medio è uguale alla semi somma dei due estremi.*

Così se saremo obbligati di trovare in tali equi differenze un estremo, dal doppio del medio toglieremo l' estremo conosciuto, e se dovremo cercare il medio, divideremo la somma degli estremi per 2.

Per esempio nell' equi-differenza

$$\div 17 . 12 . x$$

avremo

$$x + 17 = 12 \times 2 = 24,$$

$$x = 24 - 17 = 7$$

e quindi

$$\div 17 . 12 . 7.$$

E nell' equi-differenza

$$\div 13 . x . 7$$

avremo

$$x = \frac{13 + 7}{2} = 10$$

e per conseguenza

$$\div 13 . 10 . 7.$$

Questo valore di x è ciò che si chiama un *medio differenziale*, o un *medio proporzionale aritmetico* fra i due numeri 13 e 7.

220. Possiamo in una equi-differenza *aumentare i due antecedenti o diminuirli, aumentare i conseguenti o diminuirli, aumentare i due primi termini o i due ultimi, o diminuirli di un medesimo numero*, senza che l'equi-differenza cessi di esistere.

Infatti è evidente che, mediante queste trasformazioni, si aumenta o si diminuisce di un medesimo numero la somma degli estremi e quella dei medii. Così l'eguaglianza delle due somme sussiste, e segue lo stesso dell'equi-differenza mediante l'inversa della proprietà fondamentale.

Possiamo ugualmente *invertire l'ordine dei due estremi, quello dei due medii*, ovvero *mettere i medii invece degli estremi*, e l'equi-differenza sussisterà sempre, mentre è evidente che dopo queste mutazioni la somma degli estremi rimane ancora uguale a quella dei medii.

In generale potremo fare tutti i cangiamenti che vorremo sopra un'equi-differenza, purchè sieno tali che la somma degli estremi rimanga uguale a quella dei medii.

Queste nozioni sopra l'equi-differenze sono più che sufficienti atteso il poco uso che ne facciamo in Aritmetica.

Passiamo ora a parlare dei rapporti geometrici, i quali sono di un grande uso e per conseguenza di maggior utilità.

221. Allorquando due rapporti per divisione sono uguali, il complesso dei quattro numeri che gli formano, si chiama *una proporzione geometrica* o semplicemente *proporzione*.

Siano, per esempio, i quattro numeri 8, 4, 6, 3; il rapporto di 8 a 4 è 2, o il quoziente di 8 diviso per 4 è 2, come pure il rapporto di 6 a 3 essendo il medesimo quoziente 2, questi quattro numeri formano una *proporzione* che si scrive così

$$8 : 4 :: 6 : 3,$$

ponendo *due* punti fra il primo e il secondo numero, *quattro* fra il secondo e il terzo, e *due* fra il terzo e il quarto.

Una proporzione si enuncia come un' equi-differenza: 8 *sta a* 4 *come* 6 *sta a* 3, il che significa che il numero 8 contiene il 4 tante volte quante il numero 6 contiene il 3.

Una proporzione può scriversi ancora come segue

$$\frac{8}{4}=\frac{6}{3},$$

e sotto questa forma vediamo subito che tutte le proprietà delle frazioni appartengono ai rapporti.

Del rimanente le denominazioni dei termini sono le medesime che nelle equi-differenze.

Così 8 e 6 sono gli *antecedenti*; 4 e 3 sono i *conseguenti*; finalmente 8 e 3 si chiamano gli *estremi*; 4 e 6 i *medii* della proporzione.

222. Allorchè quattro numeri sono in proporzione, il *rapporto comune* che esiste fra i due primi termini e fra i due ultimi, può essere un numero intero, o un numero frazionario, ovvero una frazione propriamente detta.

Si abbiano, per esempio, le proporzioni

$$8 : 4 :: 6 : 3,$$
$$12 : 9 :: 24 : 18,$$
$$7 : 11 :: 21 : 33.$$

Nella prima il rapporto comune è 2; nella seconda abbiamo $\frac{12}{9}=\frac{24}{18}=\frac{4}{3}$; dunque il rapporto comune è un numero essenzialmente frazionario.

Finalmente nella terza si ha $\frac{21}{33}=\frac{7}{11}$ sopprimendo il fattore 3 comune ai due termini. Così la frazione $\frac{7}{11}$ è il rapporto comune.

223. Prendendo sempre per esempio i numeri di sopra (n.° 221), osserviamo che essendo le due frazioni $\frac{8}{4}$ e $\frac{6}{3}$ uguali, esse devono diventare identiche per mezzo della loro riduzione al medesimo denominatore. Facendo questa riduzione viene

$$\frac{8 \times 3}{4 \times 3} = \frac{4 \times 6}{4 \times 3},$$

donde risulta necessariamente $8 \times 3 = 4 \times 6$. Esaminando la formazione di questi prodotti, formazione che sarà evidentemente la medesima qualunque sieno i numeri della proporzione, si riconosce che i fattori 8 e 3 del primo prodotto sono gli *estremi* della proporzione, e che i fattori 4 e 6 del secondo sono i medii.

Così in ogni proporzione *il prodotto degli estremi è uguale a quello dei medii.*

Questa proprietà è la proprietà fondamentale delle proporzioni: essa stabilisce fra i loro quattro termini un legame tale che uno è interamente determinato dai tre altri; dimodo che tre termini di una proporzione essendo conosciuti, possiamo considerare il quarto come ugualmente conosciuto.

224. Infatti allorchè due quantità sono uguali, qualunque sieno le operazioni che possiamo far subire all'una, se le facciamo ugualmente subire all'altra, i risultamenti che otterremo da una parte e dall'altra saranno necessariamente uguali. Così dividendo alternativamente i due prodotti uguali 8×3 e 4×6 per ciascuno dei quattro numeri che essi contengono, otterremo le seguenti uguaglianze.

$$\frac{8 \times 3}{4} = \frac{4 \times 6}{4} = 6; \qquad \frac{8 \times 3}{6} = \frac{4 \times 6}{6} = 4.$$

$$\frac{4 \times 6}{8} = \frac{8 \times 3}{8} = 3; \qquad \frac{4 \times 6}{3} = \frac{8 \times 3}{3} = 8.$$

Le due prime fanno conoscere che si ottiene uno dei *medii* dividendo *il prodotto degli estremi* per l'altro *medio*, e le due seconde, che si ottiene uno degli *estremi* dividendo il *prodotto dei medii* per l'altro estremo.

225. Così indicando, come si usa, con la lettera x una quantità incognita, se si domandasse qual'è il valore del quarto termine della proporzione

$$16 : 24 :: 6 : x$$

siccome il numero cercato è un estremo, si troverebbe il suo valore moltiplicando i due medii 6 e 24, e dividendone il loro prodotto 144 per 16 estremo conosciuto, e si avrebbe in questa guisa

$$x = \frac{144}{16} = 9,$$

e la proporzione completa sarebbe

$$16 : 24 :: 6 : 9.$$

Ugualmente se si domanda qual'è il valore del terzo termine della proporzione

$$125 : 25 :: x : 3$$

siccome il numero cercato x è un *medio,* si troverebbe il suo valore moltiplicando i due estremi 125 e 3, e dividendone il loro prodotto 475 per 25. Il quoziente 15 significa che $x = 15$, e che la nostra proporzione è

$$125 : 25 :: 15 : 3$$

226. Se i due medii di una proporzione sono uguali, come nella seguente

$$21 : 9 :: 9 : 3$$

la proporzione si dice allora una *proporzione continua.* In questo caso, siccome il prodotto dei due medii diventa il *quadrato* di uno di loro, ne segue che questo quadrato è uguale al prodotto degli estremi. Da ciò si vede *che per avere uno dei due medii conviene estrarre la radice quadrata del prodotto degli estremi.*

Si abbia, per esempio, la proporzione

$$256 : x :: x : 16$$

x essendo il termine medio incognito di una *proporzione continua*, si ha

$$x^2 = 256 \times 16 = 4096$$

donde si deduce

$$x = \sqrt{4096} = 64;$$

il che dà

$$256 : 64 :: 64 : 16$$

64 è ciò che si chiama *un medio proporzionale fra i due numeri* 256 *e* 16.

227. Possiamo assoggettare una proporzione a diversi cambiamenti d'ordine nei suoi quattro termini, e a diverse trasformazioni senza che la proporzione cessi per questo di esistere. Ecco le più importanti di queste proprietà.

1.° Possiamo *moltiplicare o dividere i due primi termini, o i due ultimi per un medesimo numero* senza alterare la proporzione.

Infatti il rapporto dei due primi termini o quello dei due ultimi non mi rappresentano altro che una divisione accennata (n.i 83 e 84) nella qual divisione uno degli antecedenti è il dividendo e il corrispondente conseguente ne è il divisore; e siccome si sa (n.° 88) che moltiplicando o dividendo i due termini di una divisione per un medesimo numero il quoziente rimane lo stesso; così il principio in questione è vero.

2.° Possiamo ugualmente *moltiplicare o dividere i due antecedenti, moltiplicare o dividere i due conseguenti per un medesimo numero* senza alterare la proporzione.

3.° Possiamo ancora *invertire l'ordine degli estremi di una proporzione, quello dei medii*, ovvero *mettere gli estremi in luogo dei medii*, e la proporzione esisterà sempre fra i quattro numeri.

Per esempio, dalla proporzione

$$24 : 8 :: 12 : 4,$$

si può dedurre successivamente

Cangiando gli estremi

$$4 : 8 :: 12 : 24.$$

Cangiando i medii

$$24 : 12 : 8 : 4.$$

Mettendo i medii in luogo degli estremi

$$8 : 24 :: 4 : 12.$$

Il rapporto *comune* è differente in tutte le proporzioni. Infatti della prima è 3; $\frac{4}{8}$ o $\frac{1}{2}$ nella seconda; 2 nella terza, e $\frac{8}{24}$ ovvero $\frac{1}{3}$ nella quarta. Ma è evidente che ciascuna proporzione deve ciò non ostante sussistere, poichè dopo questi cambiamenti si vede che il prodotto degli estremi rimane sempre uguale a quello dei medii.

Le diverse mutazioni che si fanno provare ai termini di una proporzione sono indicate sotto il nome di *alternando e invertendo.*

Le trasformazioni, che consistono nel moltiplicare o dividere i termini, si chiamano moltiplicando o dividendo.

4.° In ogni proporzione *la somma o la differenza dei due primi termini sta al secondo termine come la somma o la differenza dei due ultimi sta al quarto.*

Così nella proporzione

$$24 : 8 :: 12 : 4$$

si ha aggiungendo

$$24 + 8 : 8 :: 12 + 4 : 4 \ldots . (1),$$

e sottraendo

$$24 - 8 : 8 :: 12 - 4 : 4 \ldots . (2).$$

Ora per provare la verità di queste nuove proporzioni osserverò, che l'aggiunta o la sottrazione del conseguente a ciascuno antecedente, non fa che aumentare o diminuire di un'*unità* ciascuno dei due rapporti: e siccome i due rapporti erano uguali, così lo devono essere ancora i rapporti risultanti.

Le due proporzioni possono riunirsi in una sola come segue.

$$24 \pm 8 : 8 :: 12 \pm 4 : 4 \ldots . (3)$$

N. B. $\pm$ si pronunzia *più* o *meno.*

Dalla proporzione (3) si deduce cangiando i medii di posto

$$24 \pm 8 : 12 \pm 4 :: 8 : 4 \ldots . (4)$$

ma dalla data proporzione

$$24 : 8 :: 12 : 4,$$

si ha ancora

$$24 : 12 :: 8 : 4;$$

dunque siccome i due rapporti 24 a 12, e 8 a 4 sono uguali: così potremo sostituire nella proporzion · (4) l'un rapporto per l'altro ed avremo

$$24 \pm 8 : 12 \pm 4 :: 24 : 12,$$

ovvero

$$24 \pm 8 : 24 :: 12 \pm 4 : 12.$$

Combinando questo risultamento con quello ottenuto nella proporzione (3), possiamo comprendere in un solo enunciato queste proprietà: che in ogni proporzione *la somma o la differenza dei due primi termini sta al primo o al secondo termine, come la somma o la differenza dei due ultimi sta al terzo o al quarto.*

5.° *La somma o la differenza degli antecedenti sta alla somma o alla differenza dei conseguenti come un antecedente qualunque sta al suo conseguente.*

Si abbia la medesima proporzione

$$24 : 8 :: 12 : 4,$$

cangiando i medii di posto avremo

$$24 : 12 :: 8 : 4.$$

Applicando a questa proporzione la proprietà precedente avremo

$$24 \pm 12 : 12 :: 8 \pm 4 : 4,$$

o cangiando i medii di posto

$$24 \pm 12 : 8 \pm 4 :: 12 : 4;$$

queste proporzioni, paragonate alla data

$$24 : 8 :: 12 : 4$$

dimostrano evidentemente la proprietà enunciata.

Osserveremo come nella proprietà antecedente, siccome i due rapporti 24 a 8, e 12 a 4 sono uguali, che avremo ancora

$$24 \pm 12 : 8 \pm 4 :: 24 : 8.$$

Ora decomponendo questa proporzione in due avremo.

$$24 + 12 : 8 + 4 :: 24 : 8,$$
$$24 - 12 : 8 - 4 :: 24 : 8,$$

e a motivo del rapporto uguale 24 : 8

$$24 + 12 : 8 + 4 :: 24 - 12 : 8 - 4;$$

ovvero cangiando i medii di posto

$$24 + 12 : 24 - 12 :: 8 + 4 : 8 - 4;$$

vale a dire, che in ogni proporzione *la somma degli antecedenti sta alla loro differenza, come la somma dei conseguenti sta alla loro differenza.*

6.° Se si hanno una serie di numeri 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ec. formanti due a due dei rapporti uguali in modo che si abbia

$$2 : 4 :: 8 : 16 :: 32 : 64 :: 128 : 256 \ldots;$$

dico che *in questa serie di rapporti uguali la somma di tutti gli antecedenti* 2, 8, 32, 128 . . . , *sta alla somma di tutti i conseguenti* 4, 16, 64, 256, ... *come un antecedente qualunqne sta al suo conseguente.*

Infatti i due primi rapporti

$$2 : 4 :: 8 : 16$$

danno in virtù della proprietà antecedente

$$2 + 8 : 4 + 16 :: 8 : 16;$$

ma, siccome si ha

$$8 : 16 :: 32 : 64$$

ne risulta

$$2 + 8 : 4 + 16 :: 32 : 64$$

ed applicando a questa nuova proporzione la medesima proprietà

$$2 + 8 + 32 : 4 + 16 + 64 :: 32 : 64.$$

Ma si ha ancora

$$32 : 64 :: 128 : 256.$$

Così ne dedurremo ancora

$$2 + 8 + 32 : 4 + 16 + 64 :: 128 : 256$$

e per conseguenza

$$2 + 8 + 32 + 128 : 4 + 16 + 64 + 256 :: 128 : 256$$

e così di seguito qualunque sia il numero dei rapporti uguali.

7.° *La somma o la differenza dei numeratori, e la somma o la differenza dei denominatori di due frazioni uguali producono una nuova frazione uguale a ciascuna delle frazioni proposte.*

Siano le due frazioni $\frac{8}{20}$ e $\frac{2}{5}$.

Ora l'uguaglianza $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ equivalga alla proporzione

$$8 : 20 :: 2 : 5,$$

ed applicando la proprietà del numero (5.°) avremo

$$8 + 2 : 20 + 5 :: 8 : 20 :: 2 : 5,$$

e

$$8 - 2 : 20 - 5 :: 8 : 20 :: 2 : 5;$$

dunque

$$\frac{8 \pm 2}{20 \pm 3} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

8.° *I prodotti dei termini corrispondenti di due proporzioni formano loro medesimi una proporzione*, vale a dire che avendo le due proporzioni

$$2 : 4 :: 3 : 6$$
$$3 : 4 :: 6 : 8$$

si ha ancora

$$2 \times 3 : 4 \times 4 :: 3 \times 8 : 6 \times 8.$$

Infatti, la prima e la seconda proporzione possono mettersi ancora sotto la seguente forma

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6},$$
$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}.$$

Premesso ciò, se queste due uguaglianze si moltiplicano membro a membro, risulteranno necessariamente dei prodotti uguali. Ora effettuando questa operazione con la regola della moltiplicazione delle frazioni (n.° 135) si ottiene

$$\frac{2 \times 3}{4 \times 4} = \frac{5 \times 6}{6 \times 8}$$

donde

$$2 \times 3 : 4 \times 4 :: 3 \times 6 : 6 \times 8$$

ed effettuando i calcoli

$$6 : 16 :: 18 : 48$$

Questo è quanto da noi si doveva dimostrare.

Possiamo dimostrare la verità di quest' ultima proporzione. Infatti, dividendo i due termini del secondo rapporto successivamense per 3, si ottiene la proporzione identica

$$6 : 16 :: 6 : 16$$

Dalla natura delle operazioni che abbiamo effettuato per eseguire questa operazione il rapporto comune $\frac{6}{16}$ della risultante proporzione, è uguale al prodotto dei due rapporti delle proporzioni date. Questo nuovo rapporto prende il nome di composto.

Questa proprietà è evidente che risulterebbe ancora tutte le volte che si avesse un maggior numero di proporzioni.

Nel caso in cui i numeri che compongono le proporzioni fossero respettivamente uguali, come nelle due seguenti

$$2 : 4 :: 3 : 6$$
$$2 : 4 :: 3 : 6$$

si avrebbe

$$2^2 : 4^2 :: 3^2 : 6^2.$$

E siccome abbiamo detto, che questa proprietà può applicarsi ancora ad un maggior numero di proporzioni, così ne possiamo concludere, *che quando quattro quantità sono in proporzione, tutte le potenze del medesimo grado di queste quantità sono esse medesime in proporzione.*

Risulta evidentemente da ciò, che le *radici* del medesimo grado di quattro numeri in proporzione formano ugualmente una proporzione, vale a dire che se si ha

$$6 : 16 :: 18 : 48$$

ne possiamo concludere

$$\sqrt{6} : \sqrt{16} :: \sqrt{18} : \sqrt{48}.$$

Infatti i due rapporti $\frac{6}{16}$, e $\frac{18}{48}$ essendo uguali, le radici quadrate di questi rapporti sono pure uguali, e si ha

$$\sqrt{\frac{6}{16}} = \sqrt{\frac{18}{48}}.$$

Ma per estrarre la radice quadrata da una frazione bisogna (n.° 199) estrarre la radice quadrata del numeratore e quella del denominatore, il che dà

$$\sqrt{\frac{6}{16}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{16}} \quad \text{e} \quad \sqrt{\frac{18}{48}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{48}};$$

dunque

$$\sqrt{6} : \sqrt{16} :: \sqrt{18} : \sqrt{48}$$

Il ragionamento sarebbe lo stesso per la radice cubica, o per una radice di grado qualunque.

228. Le proporzioni sono di un grand' uso nell' Aritmetica. Infatti, la soluzione di qualunque problema numerico si

riduce alla determinazione di un numero, e per ottenere ciò bisogna necessariamente conoscere i rapporti del numero cercato con altri numeri conosciuti. La condizione essenziale per arrivare alla soluzione di un problema qualunque è perciò di stabilire esattamente questi rapporti.

229. Si dice che una cosa è in *rapporto diretto* con un altra quando la relazione che esiste fra loro è tale che una non può aumentare o diminuire senza che l'altra aumenti o diminuisca. Per esempio, se un cavallo camminando di un passo uguale fa una lega in un'ora, ne farà due in due ore. Qui lo spazio percorso cresce come il tempo impiegato a percorrerlo, e si dice che lo spazio e il tempo sono in *rapporto diretto.*

230. Quando al contrario la relazione di due cose è tale che una delle due aumentando l'altra diminuisce, si dice che esse sono in *rapporto inverso.* Per esempio, se un cavallo percorre una data strada in due ore, nel mentre che un altro cavallo percorre la medesima strada in un'ora; le velocità respettive saranno in *rapporto inverso* dei tempi impiegati, poichè il primo cavallo va tanto più veloce quanto meno tempo impiega.

231. *La regola del tre* ha per scopo la ricerca di uno dei termini di una proporzione di cui se conoscono tre altri. Essa si compone dunque (n.° 224) di una moltiplicazione e di una divisione. Qualunque problema nel quale si può stabilire che il rapporto della quantità cercata con una quantità conosciuta è il medesimo che il rapporto diretto o inverso di due altre quantità conosciute, si risolve per mezzo di una regola del tre. Questo è ciò che in seguito rileveremo con maggior chiarezza.

CAPITOLO III

DELLE PROGRESSIONI

232. Le progressioni si distinguono in *aritmetiche* e *geometriche.* Cominceremo a parlare delle progressioni aritmetiche che più comunemente diconsi *progressioni per differenza.*

Una serie di numeri tali che uno qualunque di loro superi quello che lo segue, o sia superato da un numero costante, prende il nome di *progressione per differenza.*

Il numero costante che rappresenta la differenza invariabile fra due numeri consecutivi, si chiama la *ragione* o la *differenza* della progressione.

Le progressioni per differenza si rappresentano in scritto come l'equidifferenze continue, vale a dire ponendo in testa il segno $\div$, e un punto dopo ciascun termine.

Siano le due progressioni

$$\div 1 . 4 . 7 . 10 . 13 . 16 . 19 . 22 . 25 . 28 . 31 \ldots\ldots\ldots,$$
$$\div 28 . 24 . 20 . 16 . 12 . 8 . 4 . 0 . -4 . -8 . -12 . -\ldots;$$

Nella prima ciascun termine supera quello che lo precede del numero costante 3; infatti $4-1=3$, $7-4=3$, $10-7=3$; perciò 3 è la ragione o la differenza della progressione.

Nella seconda ciascun termine è superato da quello che lo precede del numero costante 4; infatti $28-24=4$, $24-20=4$, $20-16=4$, ...; 4 è dunque la ragione della progressione.

Nel caso in cui i numeri sieno disposti in modo da crescere continuamente, vale a dire quando la ragione è positiva come nella prima progressione, allora essa dicesi *crescente;* nel caso contrario quando cioè i numeri vanno diminuendo continuamente, come nella seconda progressione, allora la progressione dicesi *decrescente.*

Una progressione si enuncia nella seguente maniera

1 *sta a* 4, *come* 4 *sta a* 7, *come* 7 *sta a* 10, ec.; ovvero più semplicemente 1 *sta a* 4, *sta a* 10, *sta a* 13 .....

233. Premesso ciò, dalla prima progressione aritmetica, nella quale la ragione è 3, abbiamo

2.° termine $4 = 1 + 3$
3.° ..... $7 = 4 + 3 = 1 + 3 . 2$
4.° ..... $10 = 7 + 3 = 1 + 3 . 3$
5.° ..... $13 = 10 + 3 = 1 + 3 . 4$
6.° ..... $16 = 13 + 3 = 1 + 3 . 5$
ec. ec. ec.

cioè il 2.° termine è uguale al 1.° più la ragione; il 3.° è uguale al 2.° più la ragione, cioè uguale al 1.° più due volte la ragione; il 4.° è uguale al 3.° più la ragione, ovvero uguale al 1.° più tre volte la ragione, e così in seguito: dunque in generale potremo concludere che *un termine qualunque di una progressione per differenza è uguale al primo termine, più tante volte la ragione quanti termini vi sono avanti quello che si considera.*

Se si considerasse la seconda progressione, vale a dire una progressione decrescente si avrebbe

2.° termine $24 = 28 - 4$
3.° ..... $20 = 24 - 4 = 28 - 4 - 4 = 28 - 4 . 2$
4.° ..... $16 = 20 - 4 = 28 - 4 . 2 - 4 = 28 - 4 . 3$
5.° ..... $12 = 16 - 4 = 28 - 4 . 3 - 4 = 28 - 4 . 4$
6.° ..... $8 = 12 - 4 = 28 - 4 . 4 - 4 = 28 - 4 . 5$
ec. ec. ec.

donde, ragionando come sopra, con facilità dedurremo, che *un termine qualunque di una progressione per differenza decrescente è uguale al primo termine meno tante volte la ragione quanti termini vi sono avanti quello che si considera.*

E volendo riunire questi due enunciati in un solo potremo dire, che *un termine qualunque di una progressione per differenza è uguale al primo termine, più o meno tante volte la ragione quanti termini vi sono avanti quello che si considera, secondo che trattasi di progressioni per differenza crescenti o decrescenti.*

234. Da questa proprietà si deduce il mezzo per trovare un termine qualunque di una progressione per differenza, quando si conosce il primo termine e la ragione.

Si cerchi, per esempio, il nono termine della prima progressione, il primo termine della quale è 1 e la ragione è 3: questo termine sarà

$$1 + 8 . 3 = 25.$$

Si troverebbe ugualmente per il 75.° termine

$$1 + 74 . 3 = 223.$$

Supponiamo che si voglia il 10.° termine della seconda progressione: troveremo

$$28 - 4 . 9 = -8.$$

Se si volesse il 300 si troverebbe

$$28 - 299 . 4 = -1168.$$

235. Da tutto ciò ne emerge ancora la conseguenza d'inserire fra due numeri dati quanti medii differenziali si vuole vale a dire altri numeri che formino con i due numeri dati una progressione per differenza.

Proponiamo infatti d'*inserire fra i numeri 4 e 48 dieci medii differenziali.*

Ora siccome la progressione che vogliamo formare deve contenere i due termini dati 4 e 48 più dieci termini, così in tutto essa deve avere 12 termini, e l'ultimo termine 48 è uguale al primo più 11 volte la ragione; dunque sottraendo da quest'ultimo il primo numero 4: il resto 44 sarà uguale a 11 volte la ragione, e questa l'otterremo perciò dividendo il 44 per 11, il che dà 4.

Conoscendo la ragione 4, con facilità ne dedurremo la proporzione, la quale sarà

$$\div 4 . 8 . 12 . 16 . 20 . 24 . 28 . 32 . 36 . 40 . 44 . 48.$$

Dunque *per inserire fra due numeri dati quanti medii differenziali vorremo, è necessario sottrarre il più piccolo numero dal più grande, e dividere il resto o la differenza per il numero dei termini che vogliamo inserirvi più uno.*

Il risultamento che si ottiene così esprime la *ragione* della progressione, la quale può essere *crescente o decrescente.*

Si voglia, per esempio, *inserire fra* 38 *e* 2 *quarantaquattro medii differenziali.*

In questo esempio, operando come prescrive la regola generale, avremo

$$\text{la ragione} = \frac{38 - 2}{45} = \frac{36}{45} = \frac{4}{5},$$

e la progressione domandata sarà

$$\div 2 . 2\frac{4}{5} . 3\frac{3}{5} . 4\frac{2}{5} . 5\frac{1}{5} . 6 . 6\frac{4}{5} \ldots\ldots\ldots\ldots 38.$$

Il venticinquesimo termine di questa progressione ha per valore (n.° 233)

$$2 + \frac{4}{5} . 24 = 2 + \frac{96}{5} = 21\frac{1}{5}.$$

236. *Se fra i termini consecutivi di una progressione per differenza considerati due a due s' inserisce un medesimo numero di medii differenziali, tutte le progressioni parziali così formate compongono una sola e medesima progressione.*

Infatti, riprendiamo la progressione che abbiamo trovata nel numero precedente

$$\div 4 . 8 . 12 . 16 . 20 . 24 . 28 . 32 \ldots ;$$

e siano 3 i medii che vogliamo inserire fra 4 e 8, quindi fra 12 e 18, poi fra 16 o 12 . . . ; le ragioni di ciascuna progressione parziale saranno, per quello che abbiamo detto (n.° 235), espresse respettivamente da

$$\frac{8-4}{3+1}, \frac{12-8}{3+1}, \frac{16-12}{3+1}, \ldots ;$$

Ora tutte queste quantità sono uguali ad 1 perchè 4, 8, 12, 16 . . . sono in progressione e si ha (n.° 232)

$$8 - 4 = 12 - 8 = 16 - 12 = \ldots ;$$

così la ragione per tutte le progressioni parziali che vogliamo formare è la medesima. Inoltre, siccome l'ultimo termine di ciascuna di loro è nel medesimo tempo il primo termine della seguente, possiamo concludere che tutte queste progressioni parziali costituiscono una progressione unica.

Abbiamo infatti nel nostro caso

$$\div 4 . 5 . 6 \ldots 8 . 9 . 10 \ldots : 12 . 13 . 14 \ldots 16 \ldots ,$$

progressione evidente.

Proponiamoci per secondo esempio *d' inserire 7 medii differenziali fra due termini consecutivi qualunque della progressione*

$$\div 1 . 4 . 7 . 10 . 13 . 16 . 19 \ldots\ldots$$

In questo caso la ragione è

$$\frac{4-1}{8}, \frac{7-4}{8}, \frac{10-7}{8}, \ldots\ldots$$

vale a dire $\frac{3}{8}$.

Si ha perciò

$$\div 1 . 1\frac{3}{8} . 1\frac{6}{8} . 2\frac{1}{8} . 2\frac{4}{8} . 2\frac{7}{8} . 3\frac{2}{8} . 3\frac{5}{8} . 4 . 4\frac{3}{8} . 4\frac{6}{8} . 5\frac{1}{8} \ldots$$

$$\ldots\ldots 7 . 7\frac{3}{8} . 7\frac{6}{8} . 8\frac{1}{8} \ldots\ldots\ldots 10 . 10\frac{1}{8} \ldots\ldots\ldots 13 \ldots\ldots$$

progressione evidente.

237. Proponiamoci ora di conoscere la somma di un numero qualunque di termini di una progressione per differenza.

Sia, per esempio, la progressione per differenza

$$\div 1 . 4 . 7 . 10 . 13 . 16 . 19 . 22 . 25 . 28 . 31 . 34 . 37 . 40 \ldots\ldots,$$

di cui la ragione è 3, e si cerchi la somma dei primi otto termini.

Dalla natura delle progressioni abbiamo, partendo dal primo termine,

il 1.° termine 1 più la ragione 3 = al 2.° termine 4,
2.° ..... 4 ..... 3 = 3.° 7,
3.° ..... 7 ..... 3 = 4.° 10,
4.° ..... 10 ..... 3 = 5.° 13,
5.° ..... 13 ..... 3 = 6.° 16,
6.° ..... 16 ..... 3 = 7.° 19,
7.° ..... 19 ..... 3 = 8.° 22;

e partendo dall' ultimo termine

l' 8.° termine 22, meno la ragione 3 = al 7.° termine 19,
7.° ..... 19 ..... 3 = 6.° 16,
6.° ..... 16 ..... 3 = 5.° 13,
5.° ..... 13 ..... 3 = 4.° 10,
4.° ..... 10 ..... 3 = 3.° 7,
3.° ..... 7 ..... 3 = 2.° 4,
2.° ..... 4 ..... 3 = 1.° 1,

vale a dire si hanno le due seguenti serie di uguaglianze

$$1+3=4,\ 4+3=7,\ 7+3=10 \ldots\ldots 16+3=19,\ 19+3=22;$$
$$22-3=19,\ 19-3=16,\ 16-3=13, \ldots\ldots 7-3=4,\ 4-3=1.$$

Da ciò, sommando le uguaglianze corrispondenti, abbiamo

$$1+22=4+19,\ 4+19=7+16, \ldots\ldots 16+7=19+4,\ 19+4=22+1,$$

cioè la somma di due termini qualunque, ugualmente lontani dal primo e dall'ultimo, è uguale alla somma dei due termini estremi.

Premesso ciò, si sommino tutti i termini della nostra progressione, prendendola prima nell'ordine medesimo in cui è data, e quindi in un ordine inverso, avremo le due espressioni

$$1+4+7+10 \ldots\ldots\ldots\ldots + 19 + 22;$$
$$22+19+16+13 \ldots\ldots\ldots\ldots + 4 + 1.$$

Dunque aggiungendo queste due espressioni termine a termine, se osserviamo che la somma di due termini corrispondenti è sempre uguale alla somma dei due estremi $1+22$ vale a dire del primo e dell'ultimo della nostra progressione, rimarremo facilmente convinti che se moltiplicheremo questa somma pel numero dei termini che vogliamo addizionare, che nel nostro caso è 8, otterremo il doppio della somma dei primi otto termini della nostra progressione, e che perciò la metà di questo prodotto sarà la somma ricercata.

Ora, siccome il metodo per mezzo del quale abbiamo ottenuto la somma degli otto primi termini della nostra progressione può applicarsi a qualunque siasi progressione e a qualunque numero di termini, potremo stabilire in generale: che *la somma dei termini di una progressione aritmetica è uguale alla semi-somma dei termini estremi moltiplicata pel numero dei termini.*

238. Applichiamo l'esposte teorie ad alcuni esempi

1.° *Si domandi la somma dei 27 primi termini della progressione*

$$\div 1 . 5 . 9 . 13 \ldots\ldots\ldots$$

Bisogna cominciare dal cercare l'espressione del 27.° ter-

mine. Ora la ragione essendo in questo caso 4, il 27.° termine sarà uguale (n.° 233) $1 + 26 \times 4 = 105$. Dunque la somma sarà uguale (n.° 237) a $\frac{(1 + 105)\,27}{2} = \frac{106 \times 27}{2}$ $= 53 \times 27 = 1431$.

2.° *Si domandi la somma dei 50 primi termini della progressione*

$$\div 2 . 7 . 12 . 17 \ldots .$$

Si trova pel 50.° termine

$$2 + 49 \times 5 = 247.$$

Dunque la somma sarà

$$\frac{(2 + 247)\,50}{2} = 249 \times 25 = 6225.$$

Progressioni per Quoziente.

239. Un seguito di termini tale, dei quali uno qualunque è uguale a quello che lo precede moltiplicato per un numero costante, forma ciò che chiamasi una *progressione per quoziente*, o *progressione geometrica*.

Il numero costante, che rappresenta il quoziente invariabile fra due numeri consecutivi, si chiama la *ragione*, o il *quoziente* della progressione.

Le progressioni per quoziente si scrivono come le proporzioni continue, vale a dire ponendo in testa il segno $\div\div$, e due punti dopo ciascun termine.

Siano le due progressioni per quoziente

$$\div\div 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486 : 1458 : 4374 : \ldots\ldots$$

$$\div\div 20 : 10 : 5 : \frac{5}{2} : \frac{5}{4} : \frac{5}{8} : \frac{5}{16} : \ldots\ldots$$

Nella prima ciascun termine è uguale a quello che lo precede moltiplicato pel numero costante 3; infatti $6 = 2 \times 3$, $18 = 6 \times 3$, $54 = 18 \times 3, \ldots$ perciò 3 è la *ragione* ovvero il quoziente costante della progressione.

Nella seconda ciascun termine è la metà di quello che

lo precede, ossia è uguale a quello che lo precede moltiplicato per la frazione $\frac{1}{2}$. Infatti $10 = 20 \times \frac{1}{2}$, $5 = 10 \times \frac{1}{2}$, $\frac{5}{2} = 5 \times \frac{1}{2} \ldots$; dunque questa è una progressione per quoziente la di cui *ragione* è $\frac{1}{2}$.

Secondo che la *ragione* o il numero costante, che esprime il rapporto che passa fra due termini consecutivi di una progressione per quoziente, è *maggiore* o *minore* dell'unità, la progsessione si dice *crescente*, o *decrescente*.

Una progressione per quoziente si enuncia nella medesima maniera di una progressione per differenza cioè;

2 *sta a* 6, *sta a* 18, *sta a* 54, *sta a* 162 ....

e 20 *sta a* 10, *sta a* 5, *sta a* $\frac{5}{2}$, *sta a* $\frac{5}{4}$ ....

240. Premesse queste nozioni, dalla prima progressione per quoziente, nella quale la ragione è 3, abbiamo

2.° termine $6 = 2 \times 3$
3.° ..... $18 = 6 \times 3 = 2 \times 3 \times 3 = 2 . 3^2$
4.° ..... $54 = 18 \times 3 = 2 . 3^2 . 3 = 2 . 3^3$
5.° ..... $162 = 54 \times 3 = 2 . 3^3 . 3 = 2 . 3^4$
6.° ..... $486 = 162 \times 3 = 2 . 3^4 . 3 = 2 . 3^5$
ec. ec. ec.

cioè il secondo termine è uguale al 1.° moltiplicato per la ragione; il 3.° è uguale al secondo moltiplicato per la ragione, ovvero uguale al primo moltiplicato pel quadrato della ragione, e così in seguito. Dunque in generale potremo concludere, che *un termine qualunque di una progressione per quoziente è uguale al primo termine moltiplicato per la ragione elevata ad una potenza espresso il suo grado dal numero dei termini che vi sono avanti quello che si considera.*

Se si considerasse la seconda progressione per quoziente, vale a dire una progressione decrescente, si avrebbe

2.° termine $10 = 20 \times \frac{1}{2}$

3.° ..... $5 = 10 \times \frac{1}{2} = 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 20 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$,

4.° ..... $\frac{5}{2} = 5 \times \frac{1}{2} = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = 20 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$,

5.° ..... $\frac{5}{4} = \frac{5}{2} \times \frac{1}{2} = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = 20 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4$,

6.° ..... $\frac{5}{8} = \frac{5}{4} \times \frac{1}{2} = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{2} = 20 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5$,

ec. ec. ec.

Donde evidentemente rilevasi, che in generale si ottiene un termine di una progressione decrescente come quello di una progressione crescente.

241. Dalla proprietà dimostrata deducesi il modo di trovare un termine qualunque di una progressione per quoziente quando conosciamo il primo termine e la ragione.

Si cerchi, per esempio, il decimo termine della prima progressione, il primo termine della quale è 2, e 3 la ragione; questo termine sarà espresso da

$$2 \times (3)^9$$

In primo luogo la terza potenza di 3 è $3 \times 3 \times 3$ o 27; moltiplicando 27 per 27 si ottiene 729 per la 6.ª potenza di 3. Moltiplicando 729 per 27, terza potenza di 3, si ottiene 19683 per la nona potenza di 3.

Dunque il decimo termine della nostra progressione sarà finalmente

$$19683 \times 2 = 39366.$$

Supponiamo che si voglia l'11.° termine della seconda progressione; questo sarà espresso da

$$20 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

Ora, siccome si disse (n.° 175) che per elevare ad una potenza una frazione bisognava elevare il numeratore e il de-

nominatore a questa medesima potenza; e siccome l'unità elevata a qualunque potenza è sempre 1; così basterà elevare alla decima potenza uguale il 2, in primo luogo la quinta potenza del 2 è 32; moltiplicando per ciò 32 per 32 otterremo 1024 per la decima potenza del 2.

L'undecimo termine della citata progressione sarà perciò

$$20 \times \frac{1}{1024} = \frac{20}{1024} = \frac{5}{256}.$$

Osserveremo che se si trattasse di trovare un termine un poco lontano, il calcolo sarebbe lungo, sebbene sia certo che si arriverebbe alla vera espressione di questo termine per mezzo di successive moltiplicazioni.

242. Da questa proprietà potremo dedurre la conseguenza d'inserire fra due numeri dati quanti medii proporzionali vorremo, vale a dire altri numeri che formino con i due dati una progressione per quoziente.

Proponiamoci infatti *d'inserire fra i numeri* 2 *e* 1458 *cinque medii proporzionali.*

Siccome la progressione, che vogliamo formare, deve contenere i due termini dati 2 e 1458 più cinque termini, così in tutto essa deve esser composta di 7 termini, e l'ultimo 1458 è uguale al primo 2 moltiplicato per la ragione elevata alla sesta potenza (n.° 240); donde si vede che la ragione elevata alla sesta potenza è eguale all'ultimo termine 1458 divisa pel primo 2, cioè 729, e che la semplice ragione sarà perciò uguale a

$$\sqrt[6]{729}.$$

Ora se osserviamo fra la tavola delle potenze stabilita (n.° 175) troveremo che 729 è la sesta potenza del 3; dunque 3 è la ragione della progressione cercata, ed avremo perciò, formando i termini intermedii, come abbiamo insegnato (n.° 240), la progressione

$$:: 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486 : 1458.$$

Da ciò possiamo concludere che per inserire quanti medii proporzionali vorremo fra due termini dati, cominceremo dal cercare la ragione, e questa si otterrà come segue, cioè *dividendo il secondo numero dato pel primo, quindi e-*

straendo dal quoziente una radice di un grado indicato dal numero dei termini da inserire più uno; trovata la ragione otterremo i differenti termini moltiplicando successivamente il primo termine dato per la 1.ª, la 2.ª, la 3.ª,... potenza della trovata ragione.

Supponiamo per 2.° esempio che si voglia inserire sette medii proporzionali fra i due numeri 4 e 262144: la ragione sarà uguale a

$$\sqrt[8]{\frac{262144}{4}} = \sqrt[8]{65536}$$

E siccome nella tavola citata di sopra si trova che 65536 è l'ottava potenza del 4, così 4 è la ragione della nostra progressione, e perciò avremo

$$\begin{array}{lll} 2.^{\circ} \text{ termine} & = 4 \times 4 & = 16 \\ 3.^{\circ} \ldots\ldots\ldots & = 4 \times 4^2 & = 64 \\ 4.^{\circ} \ldots\ldots\ldots & = 4 \times 4^3 & = 256 \\ & \text{ec. ec. ec.} & \end{array}$$

e la progressione domandata sarà

$$\div\div 4 : 16 : 64 : 256 : 1024 : 4096 : 16384 : 65536 : 262144.$$

È ben vero che se si dovesse inserire un numero di termini tale, che l'estrazione di radici, necessaria farsi per avere la ragione, fosse al di là dei limiti della tavola da noi citata, non sapremmo con le nozioni avute estrarre questa radice: ma il nostro scopo in questo è solamente quello di far conoscere che si possono dimostrare per le progressioni per quoziente delle proprietà analoghe a quelle che abbiamo dimostrato per le progressioni per differenza.

243. Potremmo ugualmente provare per le progressioni per quoziente quello che abbiamo provato per le progressioni per differenza, vale a dire

1.° Che se fra tutti i termini di una progressione per quoziente, considerati due a due, s'inserisce un medesimo numero di medii proporzionali, le progressioni parziali così formate costituiscono un'unica progressione.

2.° Che in ogni progressione per quoziente il prodotto

di due termini qualunque, ugualmente distanti dai due estremi, è uguale al prodotto degli estremi.

Come pure si potrebbe determinare il modo di sommare una quantità di termini di una progressione per quoziente. Siccome però queste ricerche non ci apporterebbero che lievi vantaggi nel seguito di quest'opera, nel mentre che le dimostrazioni con le semplici regole dell'Aritmetica sarebbero un poco complicate, così rimandiamo ai trattati dell'Algebra quelli che volessero acquistare un'esatta cognizione di queste proprietà. Passeremo invece ad esporre la teoria e la pratica dei Logoritmi.

CAPITOLO IV

DEI LOGARITMI

244. L'invenzione dei Logartimi è dovuta a Nepero Barone Scozzese. Qualunque siano i mezzi che a tanto lo hanno guidato, quello che è certamente vero si è, che questa teoria è della massima importanza atteso la somma facilità e brevità che apporta nei calcoli i più faticosi dell'Aritmetica, ed essa è tale da aver reso immortale il nome dell'inventore.

La teoria dei Logaritmi dipende da due progressioni l'una per quoziente e l'altra per differenza; inoltre sebbene le proprietà che dimostreremo siano comuni a due progressioni qualunque, pure siccome i logaritmi offrono la maggiore utilità quando il primo termine della progressione per quoziente è uguale ad 1, e quello della progressione per differenza uguale 0, così considereremo due di queste progressioni.

Siano, per esempio, le due progressioni

$$\div\div 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 : 6561 : \ldots (1)$$
$$\div\ 0 . 2 . 4 . 6 . 8 . 10 . 12 . 14 . 16 \ldots (2)$$

Ciascun termine della progressione per differenza si chiama il *logaritmo* del termine che occupa il medesimo posto nella progressione per quoziente.

In generale *si chiamano logaritmi i numeri in progressioni per differenza che corrispondano termine a termine*

a numeri in progressione per quoziente, purchè un termine della progressione per quoziente sia uno, e il termine corrispondente nella progressione per differenza sia 0.

Abbiamo veduto (n.i 233 e 240) le leggi per mezzo delle quali si poteva ottenere un termine qualunque, tanto di una progressione per differenza, quanto di una progressione per quoziente. E siccome le nostre due progressioni una comincia per 1 e l'altra per 0, così partendo da questa osservazione e confrontando queste leggi concluderemo, che un termine qualunque si forma della ragione, tante volte fattore per la prima, e tante volte aggiunta per la seconda, quanti termini vi sono avanti di quello che si considera.

Ciò stabilito, moltiplichiamo insieme due termini qualunque della progressione per quoziente, per esempio, il 27 e il 243. Siccome la ragione 3 è 3 volte fattore nel 27 e 5 nel 243, così essa sarà 8 volte fattore nel prodotto: il prodotto $27 \times 243 = 6561$ sarà il nono termine della nostra prima progressione. Ma aggiungendo i termini 6 e 10 corrispondenti nella progressione per differenza ai termini 27 e 243, si vede, che la ragione 2 sarà 8 volte aggiunta nella somma 16; dunque il prodotto 6561 e la somma 16 saranno termini corrispondenti: dunque dalla definizione data 16 è il logaritmo di 6561. Da ciò si deduce che *la somma dei logaritmi di due numeri è il logaritmo del loro prodotto*. Per moltiplicare dunque 9 per 81 basta di aggiungere i logartimi 4 e 8 che corrispondano a questi fattori, e cercare il *numero* 729 che corrisponde alla somma 12, dedotta dai *logaritmi*; 729 è il prodotto cercato.

Da ciò si vede ancora che il doppio del logaritmo di un numero è uguale al quadrato di questo numero, che il triplo è uguale al cubo, e così di seguito, e che in generale *moltiplicando il logaritmo di un numero per un fattore qualunque si ottiene una potenza di questo numero, il grado della quale è indicato dal fattore per cui abbiamo moltiplicato il logaritmo*. Per 3 alla 7.ª potenza, si moltiplica il logaritmo corrispondente 2, e $2 \times 7 = 14$ risponde a $2188 = 3^7$.

Le operazioni inverse si ottengono con la massima facilità. Infatti siccome il dividendo è uguale al quoziente mol-

tiplicato pel divisore, cioè

$$\text{Dividendo} = \text{Divisore} \times \text{Quoziente},$$

e siccome abbiamo veduto, che il logaritmo di un prodotto uguaglia il logaritmo del moltiplicando più il logaritmo del moltiplicatore; così considerando il dividendo come un prodotto, il moltiplicando come il divisore, e il moltiplicatore come il quoziente, dedurremo

logaritmo dividendo=logaritmo divisore+logaritmo quoziente;

e quindi

logaritmo quoziente=logaritmo dividendo—logaritmo divisore.

Così, per dividere 729 per 81, si sottrae 8 da 12, la differenza 4 è il logaritmo di 9; laonde 9 è il quoziente domandato.

Ugualmente, siccome abbiamo veduto che per elevare un numero ad una data potenza bastava di moltiplicare il logaritmo di questo numero pel grado della potenza, così *per estrarre la radice da un numero dato basterà dividere il logaritmo di questo numero pel grado della radice.* Infatti la $\sqrt[3]{729}$ si ottiene prendendo il terzo di 12, e cercando 4 fra i logaritmi. Il numero corrispondente 9 è la radice domandata.

245. Riepilogando quanto abbiamo detto nel numero antecedente, fissseremo le seguenti regole.

1.° *Il logaritmo di un prodotto è uguale alla somma dei logaritmi dei fattori.*

2.° *Il logaritmo del quoziente di due numeri è uguale al logaritmo del dividendo diminuito di quello del divisore.*

3.° *Il logaritmo di una potenza di un numero è uguale al logaritmo di questo numero moltiplicato pel grado della potenza.*

4.° *Il logaritmo di una radice di un numero è uguale al logaritmo di questo numero diviso pel grado della radice.*

Risulta dalla seconda regola che *il logaritmo di una frazione è uguale al logaritmo del numeratore diminuito di quello del denominatore.*

E, dalle due prime regole si deduce che *il logaritmo del quarto termine di una proporzione è uguale alla somma dei*

logaritmi dei due medi diminuita del logaritmo del primo termine.

Costruzione delle tavole dei Logaritmi

246. Le precedenti osservazioni debbono essere più che sufficienti per far concepire l'utilità *di una tavola di Logaritmi*, cioè una tavola che contenga da una parte una serie di numeri in progressione per quoziente, e dall'altra i loro logaritmi, cioè dei numeri in progressione per differenza.

Siccome abbiamo veduto che tutte le operazioni sopra i numeri di una natura qualunque si riportano sempre a operazioni sopra numeri interi; così sarà sufficiente costruire una tavola che contenga i logaritmi dei numeri interi.

Fra un numero immenso di sistemi che si potevano immaginare per quest' oggetto, cioè di due progressioni l'una per quoziente e l'altra per differenza, è stato scelto la progressione decupla per la progressione per quoziente, e la serie dei numeri naturali per la progressione per differenza, cioè

$$\begin{array}{l} \div\div 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000 : \ldots \\ \div\ 0 .\ 1 .\ 2 .\ 3 .\ 4 .\ 5 .\ 6 \ldots \end{array}$$

Ora, supponiamo che fra i numeri 1 e 10, 10 e 100, 100 e 1000, ec.... s'inserisca (n.° 242) un dato numero di medi proporzionali, che questo numero sia il medesimo per ciascuna coppia, e se ne inseriscano un numero tanto grande da poter esser sicuri che fra 1 e 10 vi siano i numeri 2, 3, 4...9, fra 10 e 100 i numeri 11, 12, 13... 99, fra 100 e 1000 i numeri 101, 102 103...999 e così di seguito, ovvero che alcuni di questi differiscano tanto poco fra di loro da poterli sostituire senza errore sensibile a questi medi proporzionali.

Concepiamo quindi che fra i termini 0 e 1, 1 e 2, 2 e 3, ec.... della progressione per differenza vi siano inseriti tanti medi differenziali, quanti medi proporzionali si erano inseriti fra 1 e 10, 10 e 100, ec....; è evidente per quello

che abbiamo detto antecedentemente, che i termini della nuova progressione per differenza saranno i logaritmi dei termini della nuova progressione per quoziente.

In sostanza mediante questo sistema si viene a concepire una tavola nella quale vi si troveranno tutti i numeri interi e i loro logaritmi: e per mezzo della quale i principii che abbiamo dimostrato dovranno verificarsi in tutta la loro estensione; cioè

1.° Per moltiplicare due numeri interi dati basterà prendere nella tavola i loro logaritmi, sommarli e quindi cercare la somma fra i logaritmi, il numero corrispondente a questo logaritmo sarà il prodotto domandato.

2.° Per dividere due numeri, si sottrarrà il logartimo del divisore dal logaritmo del dividendo; si cercherà la differenza fra i logaritmi: il numero corrispondente sarà il quoziente domandato.

3.° Per fare una regola del tre si aggiungerà i logaritmi dei medi; quindi dalla somma si sottrarrà il logaritmo dell'estremo conosciuto, e il numero che corrisponderà al logaritmo di questo resto sarà il quarto termine della nostra proporzione. Ognuno vede quello che deve farsi nel caso che invece di un estremo si cercasse un medio.

4.° Per ottenere il logaritmo di una frazione, si sottrarrà il logaritmo del denominatore da quello del numeratore: il resto sarà il logaritmo domandato.

Le tavole non contenendo che i logaritmi dei numeri interi, vedremo in seguito con qual metodo vi abbiamo compreso ancora questo caso.

5.° Per elevare un numero ad una potenza, si moltiplicherà il suo logaritmo pel grado della potenza, si cercherà il prodotto fra i logaritmi ed esso corrisponderà alla potenza domandata.

6.° Per estrarre una radice da un numero, si dividerà il logaritmo di questo numero pel grado delle radice, e si cercherà il quoziente fra i logaritmi; il numero che vi corrisponde sarà la radice domandata.

247. Data l'idea del come si potrebbe formare una tavola di Logaritmi non insisterò maggiormente sopra di ciò, stantechè i mezzi che potrei adoprare per formarla sarebbe-

ro molto lunghi e tediosi, nel mentre che nelle parti più elevate delle matematiche, vi esistono dei metodi per mezzo dei quali con la massima facilità si giunge all' intento desiderato; ed invece mi limiterò ad esporre con la maggior brevità e chiarezza la disposizione e l'uso delle tavole che esistono, e giacchè vi sono in commercio e ad un modico prezzo le tavole dei Logaritmi del Sig. Girolamo De la Lande estese fino a sette decimali così supporrò nelle mani degli studiosi queste tavole.

È ben vero che le citate tavole comprendono i logaritmi dei numeri naturali da 1 a 10000 inclusive solamente, ma cercherò di rimediare alla ristrettezza delle medesime dando dei mezzi per oltrepassare questi limiti. D'altronde tutti quelli che desiderassero delle tavole più estese, potranno provvedersi delle ottime tavole di Gardiner le quali sono le più conosciute fra di noi, poichè ne sono state fatte più edizioni in Firenze per cura dei Padri delle scuole Pie, ovvero delle tavole di Callet.

Disposizione ed uso delle Tavole volgari.

248. Si chiamano *logaritmi volgari*, quelli la formazione dei quali dipende dal sistema delle due progressioni.

$$\begin{array}{l} \div\div 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : \ldots\ldots \\ \div 0 . \quad 1 . \quad 2 . \quad 3 . \quad 4 \ldots\ldots \end{array}$$

e ciò perchè ci serviamo il più comunemente di questa tavola.

Briggs, matematico inglese, fu il primo ad inventare una tavola così formata, ed è in vista di ciò che si chiamano ancora *logaritmi di Briggs*.

La ragione della progressione per quoziente, cioè 10, è ciò che chiamasi *la base* del sistema volgare.

Risulta dall'esame delle due progressioni,

1.° *Che il logaritmo della base, cioè di* 10, *è uguale a* 1;

2.° *Che il logaritmo dell' unità è uguale a* 0, *e*

3.° Che i numeri 10, 100, 1000, 10000, ec.... hanno per logaritmi la serie dei numeri naturali 1, 2, 3, 4, ec.

249. Si riconosce ancora con facilità che i numeri che sono potenze esatte del 10 non possono ottenersi che per approssimazione, e che da 1 a 10 tutti i numeri tanto interi che frazionari hanno i loro logaritmi compresi fra 0 e 1, cioè minori dell'unità: che da 10 a 100 i logaritmi si compongono di *un'* unità, e di una data frazione e così di seguito. Ora, la parte intera di un logaritmo si chiama *caratteristica:* possiamo perciò concludere che nel sistema di cui la base è 10, *la caratteristica del logaritmo di un numero ha tante unità, quante cifre vi sono nel numero dato meno una.*

Nelle tavole di Briggs, ed in quelle calcolate col suo sistema le frazioni sono state valutate in decimali.

250. Allorchè si moltiplica o si divide un numero per 10, 100, 1000, ec., il suo logaritmo deve aumentare o diminuire del logaritmo di 10, 100, 1000, ec. cioè di 1, 2, 3, ec. Dunque, fintanto che il numero resterà maggiore di 1, la parte decimale del logaritmo sarà sempre la medesima, e cangerà la sola caratteristica.

Così, per darne un esempio, considerando il numero 658, che come vedremo, le tavole danno per la parte frazionaria 0,8182259, si avrebbe

$$\log.\ 658 = 2{,}8182259$$
$$\log.\ 65{,}8 = 1{,}8182259$$
$$\log.\ 6{,}58 = 0{,}8182259.$$

Se si continua la divisione per 10, viene

$$\log.\ 0{,}658 = 0{,}8182259 - 1 = -0{,}1817741$$
$$\log.\ 0{,}0658 = 0{,}8182259 - 2 = -1{,}1817741$$
$$\log.\ 0{,}00658 = 0{,}8182259 - 3 = -2{,}1817741$$
$$\text{ec.} \qquad \text{ec.}$$

Ma è stato trovato molto più comodo di non eseguire le sottrazioni, e di dare alla parte decimale una caratteristica negativa che si scrive così: $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$,... Per esempio, $\bar{2}$,8182259 non sarà che un'abbreviazione di $-2 + 0{,}8182259$.

Ammettendo così dei logaritmi, di cui la caratteristica sola sia negativa, potremo dire che un numero decimale essendo dato, vi possiamo cangiare a piacere il posto della virgola senza che la parte decimale del suo logaritmo rimanga alterata, e nel medesimo tempo vediamo che sarà sempre

facile di ristabilire la caratteristica dalla semplice ispezione del numero dato.

251. Nelle tavole non si trovano altri logaritmi che quelli dei numeri interi; inoltre non vi è che la parte decimale la quale chiamasi *mantissa*. Ora queste tavole hanno ancora dei limiti: ve ne sono di quelle che vanno fino a 10000, altre fino a 30000, ec.; una delle più estese è quella di *Callet*, che va per fino a 108000.

Però le applicazioni logaritmiche sovente esigono la ricerca del logaritmo di un numero che eccede i limiti delle tavole, quanto di un numero frazionario. Vedremo in seguito come ci dobbiamo contenere in simili casi.

252. Per applicare i logaritmi ai calcoli numerici, bisogna risolvere per mezzo delle tavole queste due questioni: 1.° *Un numero qualunque essendo dato trovare il suo logaritmo*; 2.° *Un logaritmo essendo dato, trovare il numero al quale appartiene.*

1.ª Questione. *Trovare il logaritmo di un numero qualunque.*

Suppongo che i lettori abbiamo fra le mani le tavole di Lalande, e siccome esse sono composte di due colonne verticali, nella prima delle quali vi è scritto *numeri* e nell'altra *logaritmi*, così non mi tratterrò a risolvere la questione per quei numeri che sono compresi nei limiti delle tavole ciò essendo facilissimo, ma invece cercherò i logaritmi per numeri che oltrepassino i limiti delle dette tavole.

1.° *Si cerchi il logaritmo del numero* 637528.

Questo numero avendo *sei* cifre, la caratteristica del suo logaritmo è 5 (n.° 249); e la questione riducesi a trovarne la sola parte decimale.

Ora risulta da quanto abbiamo detto (n.° 250), che questa parte decimale è la medesima di quella del logaritmo 6375,28.

Questa preparazione consiste a separare verso la destra del numero proposto tante cifre acciò la parte del numero che rimane a sinistra sia compresa nei limiti delle tavole. Nel nostro caso si ottiene un numero compreso fra 6375 e 6376; laonde il suo logaritmo è uguale a quello di 6375, più una parte della differenza che esiste fra *log.* 6375 e *log.* 6376.

Nella tavola trovasi *log.* 6375 = 3,8044802; vi si trova ugualmente in una colonna accanto intitolata *differenze* 681 per differenza fra log. 6375 e log. 6376; questa differenza 681 esprime dell'unità della settima cifra decimale, vale a dire da 10000000^{mi}.

Premesso ciò, per ottenere la parte di questa differenza che bisogna aggiungere a log. 6375, per dedurne quello di 6375,28, si stabilisce la seguente proporzione; se per un'unità di differenza fra i numeri 6375 e 6376, si ha 681 diecimillionesimi di differenza fra i loro logaritmi, quanto per 0,28 di differenza fra 6375,28 e 6375 avranno di differenza i loro logaritmi; ovvero

$$1 : 681 :: 0,28 : x$$

donde

$$x = 681 \times 0,28 = 190,68;$$

e questo quarto termine 190,68, è quello che bisogna aggiungere di *dieci-millionesimi* al logaritmo 3,8044802, per avere il logaritmo domandato.

Siccome non dobbiamo tener conto che della parte a sinistra della virgola, in questo termine, si aggiunge 190 o piuttosto 191 (perchè la prima cifra a destra della virgola è maggiore di 5) alle ultime tre cifre del nostro logaritmo 3,8044802; e si ottiene

log. 6375,28 = 3,8044993; dunque log. 637528 = 5,8044993.

In pratica si dispone il calcolo come segue

log. 637528 = log. 6375,28 + 2

log. 6375 = 3,8044802

Differenza delle tavole . . . 681

1 : 681 :: 0,28 : x = 190,68. . . . . = 191

Dunque. . . . . log. 6375,28 = 3,8044993,

e per conseguenza . . . . . log. 637528 = 5,8044993.

2.° *Si voglia ancora il logaritmo di* 1736258.

Si ha prima di tutto log. 1736258 = log. 1736,258 + 3.

log. 1736 = 3,2395497,

Differenza delle tavole 2501

1 : 0,258 : : 2501 : x = 645,258..... = 645

Dunque..... log. 1736,258 = 3,2396142;

e per conseguenza ..... log. 1736258 = 6,2396142.

3.° *Si domandi il logaritmo di* $75\frac{73}{62}$

Questo numero è equivalente a $\frac{4723}{62}$, e (n.° 245. 2.°)

$$\log. 75\frac{73}{62} = \log. 4723 - \log. 62.$$

Ora abbiamo dalle tavole..... log. 4723 = 3,6742179

log. 62 = 1,7923917

donde, effettuando la sottrazione.... log. $75\frac{73}{62}$ = 1,8818262.

Quanto al logaritmo di un numero frazionario decimale come per esempio 87,632, abbiamo di già veduto (n.° 250) che tutto riducesi a determinare il logaritmo di 87632, quindi a sottrarre tre unità dalla caratteristica; cioè

log. 87,632 = log. 8763,2 — 2

log. 8763 = 3,9426528

Differenza delle tavole.. 496

1 : 496 : : 0,2 : x = 99,2..... = 99

Donde ..... log. 8763,2 = 3,9426627

Dunque..... log. 87,632 = 1,9426627.

Quando si tratta di una frazione propriamente detta, si sottrae ancora il log. del denominatore da quello del numeratore, ed allora viene un logaritmo negativo. Per esempio,

$$\log. \frac{3}{47} = \log. 3 - \log. 47$$

log. 3 = 0,4771212

log. 47 = 1,6720979

— 1,1949767

avvertendo, siccome il logaritmo di 47 è maggiore di log. 3, che abbiamo dovuto togliere log. 3 da log. 47, ed il risultamento che abbiamo ottenuto è negativo.

Ma possiamo, volendo avere con facilità, un logaritmo di cui la sola caratteristica sia negativa. Per eseguir ciò basta di aggiungere al primo logaritmo tante unità perchè la sottrazione possa farsi, e di dare quindi al resto, per caratteristica, questo numero di unità preso negativamente. Infatti se nell'esempio di sopra, si aggiunge 2 al logaritmo di 3, abbiamo evidentemente

$$\begin{array}{r} \log. 47 = -2 + 2{,}4771212 \\ -1{,}6720979 \\ \hline \overline{2}{,}8050233. \end{array}$$

Per maggiore uniformità, si potrebbe convenire di aumentare sempre di 10 la caratteristica del numeratore, allora bisognerebbe diminuire di 10 quella del resto, il che riporterebbe ad una caratteristica negativa.

252. 2.ª Questione. *Essendo dato un logaritmo, trovare il numero al quale appartiene.*

1.° Caso. *Supponiamo che la parte decimale del logaritmo sia positiva, e che essa si trovi nelle tavole.*

Si abbia 4,5386994. Si cerca nelle tavole dei logaritmi, e si trova precisamente questo logaritmo al quale vi corrisponde il numero 3457, il quale sarebbe il numero cercato, se la caratteristica data fosse 3. Ma la caratteristica essendo 4, bisogna moltiplicare 3457 per 10, ed avremo il numero cercato = 34570.

Si abbia per secondo logaritmo 1,5386994. Dopo aver trovato come sopra il numero 3457, osserveremo che la caratteristica data essendo soltanto 1, questo numero deve essere diviso per 100, dunque il numero cercato = 34,57.

Si abbia ancora $\overline{2}$,5386994. Il segno —, situato al di sopra di 2 indica che questa caratteristica è sola negativa. Dopo aver trovato il numero 3457, come se la caratteristica fosse 3, osserveremo che per passare alla caratteristica $\overline{2}$, bisognerà sottrarre 5 da 3; dunque il numero 3457 deve es-

sere diviso per $10^5 = 100000$; dunque il numero cercato $= 0,03457$.

È ben comodo l'osservare in questi differenti esempi, che bisogna sempre, aggiungendo degli zeri, o ponendo la virgola, aver cura che la cifra dell'ordine il più elevato sia tale che la caratteristica data gli convenga.

2.° Caso. *Supponiamo che la parte decimale del logaritmo sia positiva, e che essa non si trovi nelle tavole.*

Sia il logaritmo $= 3,4971499$. Cercando come precedentemente, se la parte decimale si trovi nelle tavole, si riconosce che essa è compresa fra 0,4970679 e 0,4972062 che sono i logaritmi di 3141 e 3142; dunque il numero cercato è uguale a 3141 più una data frazione.

Per ottenere questa frazione si prende la differenza delle tavole 1383, e la differenza 820 fra il logaritmo dato e quello di 3141; quindi si stabilisce la proporzione:

Se per 1383 *dieci-millionesimi di differenza fra log.* 3142 *e log.* 3141, *si ha un' unità di differenza fra questi numeri, quanto per* 820 *dieci-millionesimi di differenza fra il logaritmo dato e quello di* 3141, *dobbiamo avere di differenza fra i numeri corrispondenti?*

Ovvero

$$1383 : 1 :: 820 : x = \frac{820}{1383}.$$

Donde

$$x = 0,593$$

Aggiungendo questo quarto termine a 3141, si ottiene 314,539 per il numero domandato.

Ecco il tipo del calcolo

log. del numero cercato $= 3,4971499$
Si trova nella tavola ..... log. 3141 $= 3,4970679$

Differenza..... 820
Differenza delle tavole.. 1383

$$1383 : 1 :: 820 : x = 0,593;$$

dunque il numero cercato è uguale a 3141,593.

Si abbia da determinare per secondo esempio il numero corrispondente al logaritmo 0,5684364.

Si ha prima di tutto . . . . . 3,5684364 = log. 3702
dunque . . . . . 0,5684364 = log. 3,702

3.° Caso. *Si supponga che il logaritmo dato sia interamente negativo.*

Sia il logaritmo dato uguale — 1,8753145. Prendiamo questo logaritmo positivamente, e cerchiamone il numero corrispondente. Dividendo l'unità per il numero corrispondente, avremo il numero cercato: poichè il logaritmo dell'unità essendo 0, è evidente che il logaritmo di questo quoziente sarà uguale a — il logaritmo del numero corrispondente ossia a — 1,8753145.

Ma torna meglio l'evitare la divisione di 1 pel numero corrispondente, riportando il logaritmo dato ad un altro di cui la caratteristica sia solamente negativa: ora questo è ciò che si farà aggiungendo 2 al logaritmo dato, e prendendo quindi $\bar{2}$ negativo per caratteristica. Infatti abbiamo

log. del numero cercato $=0-2+(2-1,8753145)=\bar{2},1246855$.

Allora operando come nel secondo caso, e rammentandosi che la caratteristica $\bar{2}$, indica che il numero corrispondente deve avere 0 interi e 0 decimi, si trova pel numero cercato 0,0133255.

Le piccole tavole non permettono di ottenere un maggior grado di approssimazione. Se la caratteristica fosse maggiore il grado dell'approssimazione sarebbe ancora minore. Così, potendo, sarà meglio impiegare le tavole di Callet o di Gardiner per eseguire un calcolo che dimandi dell'esattezza.

COMPLEMENTI ARITMETICI, E APPLICAZIONI DELLA TEORIA DEI LOGARITMI.

253. Sovente nei calcoli dobbiamo aggiungere dei logaritmi e dalla loro somma sottrarre altri logaritmi. Vedremo adesso come potremo ridurre tutte queste operazioni ad una sola addizione col mezzo dei *complementi aritmetici* (n.° 60).

Si chiama *complemento aritmetico* di un logaritmo ciò

che manca a questo logaritmo per fare 10 unità; o in altri termini questo è *il risultamento che si ottiene sottraendo questo logaritmo da* 10.

Così,

$$compl.\ aritm.\ 2{,}7731279 = 10 - 2{,}7731279;$$

e per ottenere questo complemento, bisogna evidentemente, secondo la regola della sottrazione, togliere l'ultima cifra significativa a destra da 10, e ciascuna dell'altre cifre, da 9; il che dà

$$compl.\ aritm.\ 2{,}7731279 = 7{,}2268721.$$

Ugualmente,

$$compl.\ aritm.\ 7{,}3256812 = 2{,}6743188.$$

Se l'ultima cifra a destra del logaritmo fosse uno 0, bisognerebbe sottrarre la prima cifra significativa alla sinistra di questo zero, da 10, e le altre cifre a sinistra da 9.

Così,

$$compl.\ aritm.\ 5{,}3257630 = 4{,}6742370.$$

Ugualmente

$$compl.\ aritm.\ 8{,}6247000 = 1{,}3753000.$$

Ora è evidente che otterremo un medesimo risultamento, tanto se sottrarremo dall'operazione che dovremo eseguire il logaritmo dato, ovvero se vi aggiungeremo il suo complemento aritmetico.

Infatti, si abbia per esempio da sottrarre dal logaritmo di 827 il logaritmo di 543 avremo chiamando x questo risultamento

$$x = \log.\ 827 - \log.\ 543$$

e cercando i logaritmi

$$\begin{aligned} \log.\ 827 &= 2{,}9175055 \\ \log.\ 543 &= 2{,}7347998 \\ \hline x &= 0{,}1827057. \end{aligned}$$

Ora

$$2{,}9175055 - 2{,}7347998 = 2{,}9175055 + 10 - 2{,}7347998 - 10$$

e

$$2,9175055 - 2,7347998 = 2,9175055 + 7,2652002 - 10$$

vale a dire

$$2,9175055 - 2,7347998 = 0,1827057$$

come si era trovato non adoprando il complemento aritmetico.

254. Proponiamoci di valutare a 0,01 presso a poco l'espressione

$$x = \frac{7340 \times 3549}{681,8 \times 593,1}$$

Dalle proprietà dei logaritmi, abbiamo

$$\log. x = \log. 7340 + \log. 3549 - \log. 681,8 - \log. 593,1.$$

Operando senza i complementi, abbiamo i seguenti calcoli

log. 7340 = 3,8656961	log. 681,8 = 2,8336570
log. 3549 = 3,5501060	log. 593,1 = 2,7731279
somma = 7,4158021	somma = 5,6067849

$$\begin{aligned} 1.^a \text{ somma} &= 7,4158021 \\ 2.^a \text{ somma} &= 5,6067849 \\ \hline \text{differenza o log. } x &= 1,8090172. \end{aligned}$$

Ma il calcolo riesce più semplice impiegando i complementi, come segue

$$\begin{aligned} \log. 7340 &= 3,8656961 \\ \log. 3549 &= 3,5501060 \\ \text{comp. log. } 681,8 &= 7,1663430 \\ \text{comp. log. } 593,1 &= 7,2268721 \\ \hline \text{somma} - 20 \text{ o log. } x &= 1,8090172 \\ \log. 100\, x &= 3,8090172 \\ 100\, x &= 6442 \\ x &= 64,42 \end{aligned}$$

Si è sottratto 20 a motivo dei due complementi; e quindi, siccome si voleva conoscere x a 0,01 presso a poco, abbiamo aggiunto 2 alla caratteristica di log. x. Allora abbiamo avuto il log. di 100 x, e per conseguenza è bastato cercare

il numero intero il più vicino al quale quest' ultimo logaritmo corrisponde. Così abbiamo trovato con una piccola differenza, $x = 64,42$.

255. Proponiamoci di valutare a 0,00001 presso a poco il quoziente

$$x = \frac{(\sqrt[5]{146298})^4}{(\sqrt{988789})^6}.$$

Prendendo, secondo le regole date, il log. del numeratore e quello del denominatore, poi sottraendo l' uno dall' altro viene

$$\log. x = \frac{4}{5} \log. 146298 - \frac{5}{6} \log. 988789.$$

Ecco il tipo dei calcoli:

$\frac{4}{5}$ log. 146298		$\frac{5}{6}$ log. 988789	
log. 1462.....	0,1649474	log. 9887.....	0,9950645
Per 0,98....	2910	Per 0,89....	392
log. 146298	5,1652384	log. 988789	5,9951037
prodotto per 4...	20,6609536	prodotto per 5...	29,9755185
quoziente per 5..	4,1321907	quoziente per 6..	4,9959197

$$\frac{4}{5} \log. 146298 = 4,1321907$$

$$\text{comp. } \frac{5}{6} \log. 988789 = 5.0040803$$

$$\text{somma} - 10, \text{ ossia } \log. x = \bar{1},1362710$$

$$\log. 100000\, x = 4,1362710$$

$$100000\, x = 13686$$

$$x = 0,13686.$$

256. Si cerchi adesso a qual potenza si deve elevare $\frac{117}{337}$ per avere per risultamento $\frac{8493}{73}$, è evidente che avremo l' eguaglianza

$$\left(\frac{117}{337}\right)^x = \frac{8493}{73}.$$

Prendendo i log. dai due membri, viene

$$x\,(\log.\ 117 - \log.\ 337) = \log.\ 8493 - \log.\ 73,$$

donde

$$x = -\frac{\log.\ 8493 - \log.\ 73}{\log.\ 337 - \log.\ 117}$$

log. 8493 =	3,9290611	log. 337 =	2,5276299
log. 73 =	1,8633229	log. 117 =	2,0681859
differenza =	2,0657382	differenza =	0,4594440

$$x = -\frac{20657382}{4594440}.$$

Applicando a quest' espressione nuovamente i logaritmi, astrazione fatta dal segno —, avremo

$$\log.\ x = \log.\ 20657382 - \log.\ 4594440$$

log. 2065	0,3149201	log. 4594	0,6621910
per 0,7382	1551	per 0,440	416
log. 20657382 =	7,3150752	log. 4594440 =	6,6622326
log. 4594440 =	6,6622326		

differenza o log. x = 0,6528426.

Arrivato a questo punto cerco il numero corrispondente al logaritmo trovato, come è stato spiegato n.° 252 (2.° Caso)

log. x = 0,6528426
per 0,6528263 4496

differenza 163.. che dà 16

x = 4,49616

e rimettendo il segno —

$$x = -4,49616.$$

Questi esempi sono più che sufficienti per dare un' idea di come dobbiamo servirci della teoria dei logaritmi, la quale d' altra parte sarà diffusamente adoprata nella parte pratica.

PARTE TERZA

CAPITOLO UNICO.

APPLICAZIONI DELLE REGOLE ARITMETICHE AGLI USI SOCIALI.

Dell' unità

257. Per le misure di lunghezza in Toscana si usa il *braccio a panno*. Si divide questo in 20 *soldi*, il soldo in 12 *denari*. Vi è inoltre la *canna agrimensoria*, che si compone di cinque braccia.

Per le misure itinerarie esiste il *miglio* equivalente a braccia 2833.33.

258. L' unità di superficie è generalmente il *braccio a panno quadro*, che contiene 400 *soldi quadri*, ciascuno di 144 *denari quadri*.

Per le misure agrarie vi è il *quadrato*: si divide in 10 *tavole*; la tavola in 10 *pertiche*, la pertica in 10 *deche*, la deca poi è di 10 braccia quadre. In addietro esisteva nel fiorentino e nel pisano per le misure agrarie lo *stioro*, del quale non faremo parola essendo oramai fuori d' uso.

259. L' unità di misura pei solidi è generalmente il *braccio cubo*, che si compone di 800 *soldi cubi*; il *soldo cubo* poi si compone di 1728 *denari cubi*.

La *catasta* si usa per il legname da ardere, e si compone di 24 *braccia cube*, ovvero, a forma del commercio, di sole 18.

Pel legname da costruzione v' ha il traino, che si divide in 12 *bracciola*, ed il bracciolo in 12 once.

260. L' unità di peso è la *libbra*. Essa dividesi in 12 parti chiamate *once*; l' oncia in 24 parti appellate *denari*; il denaro in 24 *grani*.

L' unità di capacità pei liquidi è il *barile*, il quale, se è da vino, contiene libbre 133 e once 4 d' umido, e si divide in 20 parti chiamate fiaschi; se da olio, contiene libbre 88 d' umido, e si compone di fiaschi 16.

L' unità di capacità per gli aridi è lo *stajo*, e dividesi in 4 *quarti*; il quarto in 8 *mezzette*, la mezzetta in 2 quartucci. 3 staja formano un *sacco*, e 8 sacca formano il *moggio*.

261. L' unità monetaria è la *lira*, ovvero il *fiorino*.

La lira si divide in 20 *soldi* ciascuno di 12 *denari*: il fiorino in 100 *quattrini* o *centesimi*. Vi sono pure unità monetarie ideali, cioè lo *scudo fiorentino* equivalente a lire 7, e la *pezza* di Livorno, che si usa in commercio, che equivale a lire $5\frac{3}{4}$, e che si divide in 20 *soldi*, e il soldo in dodici *denari*, come nelle divisioni e suddivisioni della lira.

262. Il tempo si valuta per *anni*. L' anno si divide in 12 *mesi*, e il mese in *giorni*. Nell' anno *mercantile* il mese si compone costantemente di 30 giorni; nell' anno solare quattro mesi soltanto, Aprile, Giugno, Settembre, Novembre ne contano 30; Febbrajo 28, e negli anni bisestili 29; gli altri mesi sono di 31. Il giorno si divide in 24 *ore*, l' ora in 60 *minuti*, il minuto in 60 *secondi*. Da ciò deducesi che l' anno solare è di giorni 365, ovvero di giorni 366, quando è bisestile.

263. I Francesi hanno per unità di peso il *chilogrammo*, che dividono in parti decime, centesime, millesime, ec. e corrisponde a libbre nostre 2, once 11, denari 8, grani 4,83, ossia libbre 2,945144, e la libbra nostra corrisponde a chilogrammi 0,339542.

Per unità di lunghezza hanno il *metro*, che dividono in decimi, centesimi, ec. chiamati *decimetri*, *centimetri*, ec. Il metro corrisponde a braccia 1, soldi 14, denari 3,222. Dieci metri fanno un *decametro*, mille un *chilometro*, diecimila un *miriametro*. Anticamente avevano la *tesa*, misura assai cognita. Essa si divide in 6 *piedi*, il piede in 12 *pollici*, il pollice in 12 *linee*, la linea in 12 *punti*. Corrisponde a braccia 3, soldi 6 denari 9,49 e a metri 1,94904; come all' opposto il braccio corrisponde a piedi 1, pollici 9, linee 6,719, ossia

tese 0,299443; e il metro a piedi 3, pollici 0, linee 11,292, ossia tese 0.51307. Tese 848,42 fanno il miglio toscano.

Per unità di superficie l'*aro* corrispondente a 10 metri quadrati, e a braccia quadre 293,584.

L'unità di capacità è il *litro*, corrispondente alla capacità di un vaso che abbia un decimetro per lato di lunghezza, larghezza e altezza.

Per unità di moneta hanno il *franco*, che dividono in decimi e centesimi. Corrisponde a $\frac{25}{21}$ di lira, ossia a lire 1, soldi 3, denari 9,71: all'opposto la lira è $\frac{21}{25}$ di franco, cioè franchi 0,84.

Addizione, Moltiplicazione, Sottrazione e Divisione dei Numeri Complessi.

264. Per sommare i numeri complessi, si scrivono le une sotto le altre le parti del nome stesso: poi si sommano le colonne secondo il consueto andando da destra a sinistra, e si scrive al di sotto di ciascuna colonna ciò che resta dopo averne tolto, quando sia possibile, con che formare una o più unità della specie immediatamente maggiore, che si porta nella seguente colonna. Esempj

lire	soldi	den.	tese	piedi	pol.	lin.
726.	16.	8	216.	3.	10.	2,72
478.	17.	8	317.	2.	6.	3,84
642.	10.	4	416.	3.	7.	6,01
327.	15.	4	731.	4.	11.	9,90
2176.	—.	-	1682.	2.	11.	10,47

Rapporto alla moltiplicazione ne darò un solo esempio, ma tale da comprendere ancora quelli più semplici.

Si domandi quanto costano tese 25, piedi 4, pollici 6 di un dato lavoro. Sapendo che una tesa costa lire 763. 15. 6, dispongo l'operazione come segue

Lire 763. 15. 6			
Tese 25. 4. 6			
3815			
1526			
19075. —. —	prodotto di	763 × 25	
12. 10. —	»	25	per soldi 10
6. 5. —	»	25	» 5
—. 6. 6	»	25	per denari 6
381. 17. 9	»	763	per 3 piedi
127. 5. 11	»	763	per 1 piede
63. 12. 11 $\frac{1}{2}$	»	763	per 6 pollici
L. 19666. 18. 1 $\frac{1}{2}$			

Disposta l' operazione come sopra, si comincia dal fare il prodotto delle lire 763 per 25, il che dà 19075; quindi si dice se ogni tesa importasse una lira di più 25 tese importerebbero lire 25, considerando perciò che importasse solamente soldi dieci, ossia, la metà della lira, il prodotto aumenterà della metà di 25, cioè di lire 12 e soldi 10. Egualmente per 5 soldi prenderemo il quarto della lira, ovvero la metà di soldi 10, ed otterremo lire sei e soldi 5. Finalmente per 6 denari prendendo il 10mo di 5 soldi, avremo soldi 6 e denari 6; con che avremo esaurito tutto il moltiplicando composto di lire 763. 15. 6. Ora passeremo alle parti della tesa che esistono nel moltiplicatore, e diremo se invece di 25 tese divenissero 26 il prodotto aumenterebbe del valore di una tesa cioè di lire 763. 15. 6, staccheremo perciò dai 4 piedi, tre, cioè la metà della tesa e prenderemo la metà di lire 763. 15. 6 ossia lire 381. 17. 9; lo stesso faremo per le altre parti della tesa, e infine sommando tutto a forma delle regole stabilite, otterremo per prodotto totale lire 19666. 16. 1 $\frac{1}{2}$.

265. La sottrazione si eseguisce come l' abbiamo fatto per i numeri interi; vale a dire che le stesse specie si sottraggono; e se l' inferiore è maggiore, si toglie un' unità

della colonna che segue a sinistra nel numero superiore, per decomporla in tante unità della specie di quelle da sottrarsi. Esempj

lire	soldi	den.	libbre	once	den.	grani
806.	16.	8	8621.	7.	13.	21 $\frac{1}{2}$
327.	18.	4	3742.	9.	17.	20 $\frac{3}{4}$
378.	18.	4	4878.	9.	20.	— $\frac{3}{4}$

266. Per la divisione ne metterò due esempj i quali comprenderanno tutti quelli che possano incontrarsi in quest'operazione.

1.° Libbre 365 di mercanzie sono importate lire 2756. 18. 4 quanto importerà una libbra.

Lire 2756. 18. 4 | 365
201 × 20 | L. 7. 11. 0 $\frac{56}{73}$
4020
18 soldi
4038
388
23 × 12
276
4
280

È evidente in primo luogo che il quoziente in questo caso dev' essere della medesima specie del dividendo. Premesso ciò si comincia dal cercare quante volte il 365 entra in 2756 e si trova 7 con un resto di lire 201 minore del divisore 365; ora una lira vale 20 soldi, moltiplico perciò il resto 201 per 20 il che dà 4020 al quale aggiunti i soldi 18 abbiamo per nuovo dividendo parziale 4038, divido per 365 ottengo soldi 11 e un resto di soldi 20, ma siccome ogni soldo vale dodici denari, così i 20 soldi moltipli-

cati per 12 danno 276 al quale aggiunti i quattro denari si ottiene 280, e siccome il 365 non entra in 280, così metteremo 0 al quoziente, e accanto al quoziente dovremmo mettere $\frac{280}{365}$, ma siccome questa frazione è soggetta a ridursi a minori termini, così l'eseguiremo per mezzo della regola data (n. 126), ed il quoziente cercato sarà lire 7 soldi 11 e $\frac{56}{73}$ di denaro.

2.° Supponiamo che libbre 73 once 7 denari 12 di mercanzia siano importate lire 661. 16. 8 e che si domandi il prezzo di una libbra. Ciò evidentemente si eseguisce per mezzo della divisione, e il mezzo più semplice è quello di rendere il divisore incomplesso, riducendolo in unità dell'ordine il più basso che esso contenga.

Nel nostro esempio eseguiremo ciò prima moltiplicando il 73 per 12 per avere il numero dell'once contenute in 73 libbre, aggiungeremo 7 a questo numero 876, poi moltiplicheremo 883 per 24, per avere il numero dei denari contenuti in 883, aggiungendo 12 a quest'ultimo numero, vedremo che il divisore proposto è equivalente a 21204 denari. Ora una libbra contiene denari 288, il numero precedente paragonato all'unità è perciò la frazione $\frac{21204}{288}$, ed è per questa frazione che bisogna dividere le lire 661. 16. 8. Per fare sparire il denominatore 288 non si tratta perciò che di moltiplicare il dividendo e il divisore per questo numero, operazione che non altera il quoziente; il secondo diviene allora 21204, e il primo operando la moltiplicazione come al n.° 258, dà lire 190608.

Non trattasi ora che di dividere lire 190608 per 21204 il che si eseguisce come nel 1.° esempio, e si ottiene per quoziente lire 8. 19. 9 $\frac{13}{31}$.

Supponiamo ancora di avere il seguente caso

La tesa di un dato lavoro costa lire 47. 19. 5; si domanda il numero delle tese che si possano fare eseguire per lire 2728. 17. 10.

Si comincia dal ridurre in denari i due numeri propo-

sti, e si trova che il primo equivale a $\frac{654934}{240}$ di lira, e il secondo $\frac{11513}{240}$ di lira. Ora, per dividere il primo numero per il secondo, bisogna (n.° 143) rovesciare la frazione divisore, il che dà $\frac{240}{11513}$ e moltiplicare $\frac{654934}{240}$ per $\frac{240}{11513}$; ma il fattore 240 entrando nel medesimo tempo nel prodotto dei numeratori e in quello dei denominatori, possiamo sopprimerlo, e si ha $\frac{654934}{11513}$; dunque tutto si riduce a dividere 654934 per 11513, il che è conforme a quanto abbiamo fatto nel primo esempio.

Si trova mediante ciò per risultamento tese 56. 5.p 3.p 9.l $\frac{10539}{11513}$.

167. Le prove della somma, moltiplicazione, sottrazione e divisione si eseguiscono con la massima facilità, cioè la somma cominciando a sommare dalla sinistra e procedendo in tutto e per tutto come nei numeri astratti, lo stesso per la sottrazione; e rapporto all' altre due operazioni ciascuna serve di riprova all' altra.

Tutte l' altre operazioni che si possono eseguire sopra i numeri complessi, intesa bene la teoria dei numeri astratti, riescono facilissime, e dipenderà dal Maestro il proporre agli alunni tutti quelli esempi che giudicherà essere i più adattati.

FINE

INDICE

PARTE PRIMA

NOZIONI PRELIMINARI.

Quantità, Unità e Numero..... Pag. 1
Numerazione parlata e scritta..... 4
Sistema di numerazione dei Romani e Greci..... 11

CAPITOLO I.

Definizione dell' Aritmetica..... 12
Dell' Addizione..... 13
Della Moltiplicazione..... 17
Della Sottrazione..... 29
Della Divisione..... 37
Prove dell'Addizione, Moltiplicazione, Sottrazione e Divisione 56

CAPITOLO II.

Nozioni preliminari sopra le frazioni..... 59
Nozioni preliminari sopra le Potenze e Radici..... 61
Proprietà generali sopra i Numeri..... 62

CAPITOLO III.

Delle Frazioni..... 85
Riduzione alla più semplice espressione di una frazione.. 88
Riduzione delle frazioni al medesimo denominatore..... 89
Dell' Addizione delle frazioni..... 96
Della Moltiplicazione delle frazioni..... 93

Della Sottrazione delle frazioni..... Pag. 105
Della Divisione delle frazioni..... 108

CAPITOLO IV.

Delle frazioni decimali..... 116
Dell' Addizione delle frazioni decimali..... 125
Della Moltiplicazione delle frazioni decimali..... 126
Della Sottrazione delle frazioni decimali..... 127
Della Divisione delle frazioni decimali..... 128
Delle Frazioni Decimali periodiche..... 133

PARTE SECONDA

CAPITOLO I.

Formazione delle Potenze..... 145
Estrazione della radice quadrata..... 148
Estrazione della radice cuba..... 166

CAPITOLO II.

Dei Rapporti e delle Proporzioni..... 181

CAPITOLO III.

Delle Progressioni..... 196
Progressioni per differenza..... 197
Progressioni per quoziente..... 203

CAPITOLO IV.

Dei Logaritmi..... 208
Costruzione delle tavole dei logaritmi..... 211
Disposizione ed uso delle tavole volgari..... 213
Un numero qualunque essendo dato, trovare il suo logaritmo 215
Un logaritmo essendo dato, trovare il numero al quale appartiene..... 218

Complementi Aritmetici e Applicazioni della Teoria dei logaritmi ..... Pag. 220

PARTE TERZA

Capitolo Unico.

Applicazioni delle Regole Aritmetiche agli usi sociali ... 226
Dell' unità 226
Addizione, Moltiplicazione, Sottrazione e Divisione dei numeri complessi 227
Altre Operazioni d'Aritmetica 231

ERRATA

Pag.	Vers.		
30.	22.	di 9—5	di 9—4
50.	22.	contiene 596 volte il 15080 con un resto 406	contiene 15080 volte il 596 con un resto 506
72.	26.	e seg., ove dice:	

$$17355712=\begin{cases} +1.10+1+.10^2-7+5.10^3+5 \\ +2 \quad -1 \quad +7 \quad -5 \end{cases}$$

si legga

$$17355712\begin{cases} +1.10+1+7.10^2-7+5.10^3+5 \\ +2 \quad -1 \quad +7 \quad -5 \end{cases}$$

81.	6.	numeri 210, 156, 96, 72	numeri 210, 150, 96, 72
82.	23.	i quozienti 169 e 8	i quozienti 168 e 8
88.	3.	ove dice:	

Moltiplicando / Dividendo } il denominatore {si moltiplica / si divide} la frazione

si legga

Moltiplicando / Dividendo } il denominatore {si divide / si moltiplica} la frazione

92.	24.	48, 36. 18, 16, 8, 9, 1	48, 36, 18, 16, 8, 9, 4
108.	24.	(n.° 72. IV)	(n.° 71. IV)
120.	13.	*ventitre* più *sette diecine*	*ventitre* più *sette decimi*
123.	3.	3164,7569	3164,75689
123.	32.	e 0,85=08500	0,85=0,8500
126.	8.	1,740	1,750
127.	28.	1842.....1717185	1832.....1717135
137.	15.	48=8.3=2³.3	24=8.3=2³.3
154.	12.	divideremo le due ultime 16 per 4	divideremo le due ultime 17 per 4
163.	16.	195.	196.
165.	9.	217	317
175.	25.	estrarre la radice quadrata	estrarre la radice cuba
193.	25.	$\frac{8\pm2}{20\pm3}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$	$\frac{8\pm2}{20\pm5}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$
194.	4.	$2\times3:4\times4::3\times8:6\times8$	$2\times3:4\times4::3\times6:6\times8$
ivi	15.	$\frac{2\times3}{4\times4}=\frac{5\times6}{6\times8}$	$\frac{2\times3}{4\times4}=\frac{3\times6}{6\times8}$
197.	29.	1 sta a 4, sta a 10, sta a 13	1 sta a 4, sta a 7, sta a 10, sta a 13....

TAVOLA

DEI NUMERI IMPARI DA 1 A 50000 CON I PIÙ PICCOLI DIVISORI DIFFERENTI DA 3, 5, 7, 9 E 11

NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI
169	13	817	19	1273	19	1711	29	2117	29
221	13	41	29	1313	13	17	17	19	13
47	13	51	23	33	31	39	37	47	19
89	17	71	13	39	13	51	17	59	17
99	13	93	19	43	17	63	41	71	13
323	17	99	29	49	19	69	29	73	41
61	19	901	17	57	23	81	13	83	37
77	13	23	13	63	29	1807	13	97	13
91	17	43	23	69	37	17	23	2201	31
403	13	49	13	87	19	19	17	09	47
37	19	61	31	91	13	29	31	27	17
81	13	89	23	1403	23	43	19	31	23
93	17	1003	17	11	17	49	43	49	13
527	17	07	19	17	13	53	17	57	37
29	23	27	13	57	31	91	31	63	31
33	13	37	17	69	13	1909	23	79	43
51	19	73	29	1501	19	19	19	91	29
59	13	79	13	13	17	21	17	2323	23
89	19	81	23	17	37	27	41	27	13
611	13	1121	19	37	29	37	13	29	17
29	17	39	17	41	23	43	29	53	13
67	23	47	31	77	19	57	19	63	17
89	13	57	13	91	37	61	37	69	23
97	17	59	19	1633	23	63	13	2407	29
703	19	89	29	43	31	2021	43	13	19
13	23	1207	17	49	17	33	19	19	41
31	17	19	23	51	13	41	13	49	31
67	13	41	17	79	23	47	23	61	23
79	19	47	29	81	41	59	29	79	37
93	13	61	13	91	19	71	19	83	13
99	17	71	31	1703	13	77	31	89	19

NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI
2491	47	2929	29	3293	37	3743	19	4141	41
2501	41	41	17	3317	31	49	23	63	23
07	23	51	13	37	47	57	13	71	43
09	13	77	13	41	13	63	53	81	37
33	17	83	19	49	17	81	19	83	47
37	43	87	29	79	31	91	17	87	53
61	13	93	41	83	17	99	29	89	59
67	17	3007	31	97	43	3809	13	99	13
73	31	13	23	3401	19	11	37	4223	41
81	29	29	13	03	41	27	43	37	19
87	13	43	17	19	13	41	23	47	31
99	23	53	43	27	23	59	17	67	17
2603	19	71	37	31	47	69	53	4303	13
23	43	77	17	39	19	87	13	07	59
27	37	97	19	73	23	93	17	09	31
41	19	3103	29	81	59	3901	47	13	19
69	17	07	13	97	13	37	31	21	29
2701	37	27	53	3503	31	53	59	31	61
43	13	31	31	23	13	59	37	43	43
47	41	33	13	51	53	61	17	51	19
59	31	39	43	69	43	73	29	69	17
71	17	49	47	87	17	77	41	79	29
73	47	51	23	89	37	79	23	81	13
2809	53	61	29	99	59	91	13	87	41
13	29	73	19	3601	13	4009	19	93	23
31	19	93	31	11	23	31	29	99	53
39	17	97	23	29	19	33	37	4427	19
67	47	3211	13	49	41	43	13	29	43
69	19	33	53	53	13	61	31	39	23
73	13	39	41	67	19	63	17	53	61
81	43	47	17	79	13	69	13	69	41
99	13	63	13	83	29	87	61	71	17
2911	41	77	29	3713	47	97	17	89	67
21	23	81	17	21	61	4117	23	4511	13
23	37	87	19	37	37	21	13	31	23

NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI
4537	13	4883	19	5267	23	5633	43	6023	19
41	19	91	67	87	17	71	53	31	37
53	29	97	59	93	67	81	13	49	23
59	47	4901	13	5311	47	99	41	59	73
73	17	13	17	17	13	5707	13	71	13
77	23	27	13	21	17	13	29	77	59
79	19	79	13	29	73	23	59	6103	17
89	13	81	17	39	19	29	17	07	31
4601	43	97	19	53	53	59	13	09	41
07	17	5017	29	59	23	67	73	19	29
19	31	29	47	63	31	71	29	37	17
33	41	41	71	71	41	73	23	57	47
61	59	53	31	77	19	77	53	61	61
67	13	57	13	89	17	5809	37	69	31
81	31	63	61	5429	61	33	19	79	37
87	43	69	37	47	13	37	13	87	23
93	13	83	13	59	53	91	43	91	41
99	37	5111	19	61	43	93	71	6227	13
4709	17	23	47	73	13	99	17	33	23
17	53	29	23	91	17	5909	19	39	17
27	29	41	53	97	23	11	23	41	79
47	47	43	37	5513	37	17	61	53	13
57	67	49	19	39	29	21	31	83	61
69	19	61	13	43	23	33	17	89	19
71	13	77	31	49	31	41	13	6313	59
77	17	83	71	61	67	47	19	19	71
4811	17	91	29	67	19	59	59	31	13
19	61	5207	41	87	37	63	67	41	17
41	47	13	13	97	29	69	47	71	23
43	29	19	17	5603	13	77	43	83	13
47	37	21	23	09	71	83	31	6401	37
49	13	39	13	11	31	89	53	03	19
53	23	49	29	17	41	93	13	07	43
59	43	51	59	27	17	6001	17	09	13
67	31	63	19	29	13	19	13	31	59

NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI
6437	41	6773	13	7157	17	7471	31	7871	17
39	47	99	13	63	13	93	59	91	13
43	17	6817	17	69	67	7501	13	97	53
63	23	21	19	71	71	19	73	7913	41
67	29	47	41	81	43	31	17	21	89
87	13	51	13	99	23	43	19	39	17
93	43	59	19	7201	19	71	67	43	13
97	73	77	13	23	31	97	71	57	73
99	67	87	71	41	13	7613	23	61	19
6509	23	89	83	61	53	19	19	67	31
11	17	93	61	67	13	27	29	69	13
27	61	6901	67	77	19	31	13	79	79
33	47	13	31	79	29	33	17	81	23
39	13	29	13	89	37	57	13	91	61
41	31	31	29	91	23	61	47	99	19
57	79	43	53	7303	67	63	79	8003	53
83	29	53	17	13	71	97	43	21	13
93	19	73	19	19	13	7709	13	23	71
6613	17	89	29	27	17	29	59	27	23
17	13	7003	47	39	41	39	71	33	29
23	37	09	43	61	17	47	61	47	13
31	19	31	79	63	37	51	23	51	83
41	29	33	13	67	53	69	17	77	41
47	17	37	31	73	73	71	19	83	59
49	61	61	23	79	47	81	31	8119	23
67	59	67	37	87	83	83	43	31	47
83	41	81	73	91	19	87	13	37	79
97	37	87	19	97	13	7801	29	43	17
6707	19	93	41	7409	31	07	37	49	29
31	53	97	47	21	41	11	73	53	31
39	23	99	31	23	13	13	13	59	41
49	17	7111	13	29	17	31	41	77	13
51	43	23	17	39	43	37	17	89	19
57	29	41	37	53	29	49	47	8201	59
67	67	53	23	63	17	59	29	03	13

NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI
8207	29	8551	17	8947	23	9299	17	9673	17
13	43	57	43	57	13	9301	71	83	23
27	19	67	13	59	17	07	41	9701	89
49	73	79	23	77	47	13	67	03	31
51	37	87	31	83	13	29	19	07	17
57	23	93	13	89	89	47	13	27	71
79	17	8611	79	93	17	53	47	31	37
99	43	21	37	9017	71	67	17	61	43
8303	19	33	89	19	29	79	83	63	13
21	53	39	53	47	83	89	41	73	29
33	13	51	41	61	13	9407	23	97	97
39	31	53	17	71	47	09	97	99	41
41	19	71	13	73	43	51	13	9809	17
47	17	83	19	77	29	69	17	27	31
57	61	8711	31	83	31	81	19	41	13
59	13	17	23	89	61	87	53	47	43
81	17	49	13	9101	19	9503	13	57	59
83	83	59	19	13	13	09	37	69	71
99	37	73	31	31	23	17	31	81	41
8401	31	77	67	39	13	23	89	93	13
11	13	91	59	43	41	29	13	99	19
13	47	97	19	67	89	53	41	9913	23
17	19	8801	13	69	53	57	19	17	47
41	23	09	23	79	67	63	73	37	19
53	79	43	37	93	29	71	17	43	61
71	43	51	53	97	17	77	61	53	37
73	37	57	17	9211	61	89	43	59	23
79	61	73	19	17	13	93	53	71	13
83	17	79	13	23	23	99	29	79	17
89	13	81	83	53	19	9607	13	83	67
97	29	91	17	59	47	17	59	91	97
8507	47	8903	29	63	59	37	23	97	13
09	67	09	59	69	13	41	31	10001	73
31	19	17	37	71	73	59	13	13	17
49	83	27	79	87	37	71	19	19	43

NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI
10027	37	10393	19	10721	71	11029	41	11381	19
33	79	97	37	27	17	41	61	87	59
49	13	10403	101	41	23	51	43	11401	13
51	19	11	29	51	13	63	13	13	101
57	89	21	17	57	31	89	13	19	19
63	29	41	53	63	47	11101	17	41	17
81	17	47	31	77	13	07	29	49	107
97	23	69	19	83	41	11	41	53	13
10117	67	71	37	93	43	29	31	61	73
21	29	81	47	10807	101	41	13	77	23
23	53	89	17	11	19	47	71	79	13
27	13	10511	23	17	29	53	19	11507	37
47	73	17	13	19	31	67	13	09	17
83	17	19	67	23	79	83	53	13	29
87	61	23	17	41	37	89	67	21	41
89	23	37	41	49	19	91	19	31	13
10201	101	41	83	73	83	11201	23	33	19
07	59	43	13	77	73	03	17	37	83
17	17	47	53	97	17	19	13	63	31
29	53	53	61	10907	13	27	103	67	43
31	13	61	59	19	61	33	47	69	23
37	29	73	97	21	67	37	17	73	71
49	37	79	71	31	17	67	19	81	37
61	31	83	19	33	13	69	59	91	67
77	43	10603	23	43	31	81	29	11603	41
79	19	09	103	51	47	93	23	09	13
91	41	21	13	61	97	11303	89	11	17
10309	13	43	29	63	19	09	43	23	59
19	17	49	23	81	79	23	13	29	29
27	23	69	47	91	29	27	47	39	103
49	79	73	13	99	17	39	17	47	19
61	13	79	59	11009	101	57	41	51	61
63	43	93	17	17	23	59	37	53	43
79	97	97	19	21	103	71	83	59	89
87	13	99	13	23	73	77	31	63	107

NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI
11687	13	12059	31	12403	79	12779	13	13129	19
11707	23	77	13	07	19	87	19	33	23
13	13	79	47	27	17	97	67	41	17
23	19	83	43	31	31	12811	23	57	59
29	37	91	107	43	23	27	101	69	13
41	59	12121	17	49	59	33	41	93	79
47	17	27	67	61	17	39	37	99	67
49	31	37	53	69	37	47	29	13201	43
61	19	39	61	93	13	51	71	07	47
71	79	51	29	99	29	57	13	13	73
73	61	67	23	12521	19	63	19	31	101
91	13	69	43	33	83	69	17	43	17
97	47	79	19	57	29	71	61	47	13
11819	53	81	13	59	19	77	79	53	29
43	13	91	73	63	17	83	13	61	89
49	17	93	89	71	13	12913	37	71	23
57	71	12209	29	81	23	31	67	73	13
61	29	17	19	87	41	37	17	83	37
73	31	23	17	99	43	49	23	89	97
81	109	33	13	12623	13	61	13	13301	47
99	37	47	37	29	73	77	19	03	53
11911	43	59	13	31	17	89	31	19	19
17	17	83	71	43	47	97	41	33	67
29	79	93	19	67	53	13019	47	51	13
47	13	12307	31	73	19	21	29	57	19
51	17	11	13	79	31	31	83	61	31
83	23	17	109	12701	13	39	13	69	29
89	19	19	97	07	97	51	31	73	43
93	67	37	13	09	71	61	37	79	17
99	13	49	53	31	29	67	73	93	59
12013	41	59	17	37	47	73	17	13403	13
17	61	61	47	51	41	81	103	23	31
29	23	67	83	67	17	87	23	27	29
31	53	71	89	69	113	91	13	29	13
53	17	89	13	73	53	13117	13	39	89

NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI
13459	43	13813	19	14123	29	14429	47	14803	113
71	19	17	41	29	71	53	97	07	13
81	13	19	13	31	13	59	19	09	59
83	97	23	23	37	67	67	17	37	37
93	103	37	101	41	79	71	29	49	31
13501	23	43	109	67	31	73	41	57	83
07	13	47	61	71	37	77	31	63	89
11	59	61	83	83	13	91	43	73	107
29	83	89	17	91	23	14501	17	81	23
43	29	91	29	14209	13	07	89	93	53
47	19	97	13	13	61	13	23	99	47
49	17	13919	31	19	59	21	13	14909	17
61	71	27	19	27	41	27	73	11	13
71	41	39	53	33	43	69	17	21	43
79	37	43	73	37	23	73	13	33	109
83	17	49	13	39	29	79	61	41	67
89	107	57	17	57	53	87	29	53	19
13603	61	61	23	61	13	99	13	63	13
09	31	69	61	63	17	14603	17	77	17
21	53	73	89	69	19	11	19	81	71
31	43	87	71	79	109	17	47	89	13
37	13	91	17	91	31	47	97	99	53
39	23	14017	107	97	17	59	107	15007	43
61	19	23	37	99	79	71	17	11	17
63	13	27	13	14309	41	77	13	19	23
67	79	39	101	17	103	81	53	23	83
13703	71	41	19	39	13	87	19	41	13
33	31	53	13	51	113	89	37	47	41
47	59	59	17	53	31	14701	61	49	101
53	17	89	73	59	83	11	47	67	13
71	47	93	17	63	53	19	41	79	17
77	23	99	23	81	73	43	23	89	79
87	17	14101	59	83	19	61	29	97	31
93	13	11	103	93	37	89	23	15109	29
13801	37	17	19	14417	13	14801	19	19	13

NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI
15133	37	15503	37	15853	83	16171	103	16501	29
43	19	09	13	57	101	99	97	07	17
51	109	17	59	63	29	16201	17	17	83
57	23	23	19	71	59	07	19	23	13
63	59	29	53	93	23	11	13	31	61
67	29	39	41	99	13	13	31	37	23
79	43	53	103	15929	17	37	13	43	71
81	17	57	47	31	89	41	109	49	13
15203	23	63	79	41	19	43	37	59	29
09	67	71	23	43	107	59	71	71	73
21	31	77	37	47	37	71	53	79	59
23	13	93	31	49	41	77	41	89	53
29	97	99	19	77	13	79	73	91	47
47	79	15611	67	79	19	83	19	16601	13
51	101	13	13	89	59	97	43	09	17
83	17	23	17	97	17	16307	23	13	37
93	41	37	19	16003	13	09	47	27	13
15311	61	77	61	13	67	21	19	37	127
17	17	89	29	19	83	27	29	63	19
41	23	91	13	21	37	37	17	69	79
43	67	15703	41	31	17	43	59	79	13
47	103	07	113	39	43	51	83	97	59
53	13	09	23	43	61	67	13	16711	17
71	19	13	19	81	13	91	37	17	73
97	89	21	79	99	17	93	13	21	23
15403	73	51	19	16109	89	97	19	27	43
09	19	69	13	17	71	99	23	33	29
19	17	79	31	23	23	16403	47	39	19
31	13	81	43	29	127	09	61	57	13
37	43	93	17	33	13	39	17	69	41
57	13	15811	97	47	67	41	41	71	31
69	31	21	13	61	31	59	109	77	19
79	23	33	71	53	29	63	101	81	97
81	113	39	47	57	107	69	43	83	13
87	17	47	13	69	19	83	53	89	103

NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI
16799	107	17141	61	17461	19	17797	13	18157	67
16801	53	47	13	73	101	17803	19	63	41
13	17	53	17	17503	23	13	47	67	37
17	67	61	131	13	83	19	103	73	17
37	113	73	13	27	17	21	71	87	13
47	17	77	89	31	47	33	17	97	31
53	19	79	41	33	89	49	13	18203	109
59	23	97	29	37	13	61	53	09	131
61	13	17201	103	43	53	67	17	39	13
67	101	19	67	57	97	69	107	41	17
73	47	21	17	61	17	73	61	47	71
97	61	33	19	87	43	79	19	59	19
16909	37	43	43	93	73	87	31	81	101
13	13	49	47	17603	29	93	29	83	47
39	13	51	13	17	79	17917	19	99	29
49	17	61	41	21	67	33	79	18317	13
57	31	63	61	29	17	47	131	23	73
67	19	67	31	39	31	51	29	31	23
69	71	73	23	41	13	53	13	43	13
91	13	79	37	51	19	93	19	49	59
97	23	87	59	53	127	99	41	73	19
99	89	17309	19	63	17	18001	47	77	17
17009	73	23	17	71	41	17	43	83	31
23	29	29	13	87	23	19	37	91	53
51	17	57	17	93	13	23	67	18407	79
57	37	63	97	17701	31	31	13	09	41
63	113	71	29	11	89	37	17	19	113
69	13	99	127	19	13	71	17	21	13
71	43	17407	13	23	37	79	101	37	103
81	19	11	23	41	113	83	13	49	19
89	23	29	29	53	41	91	79	63	37
17111	71	41	107	67	109	18101	23	67	59
13	109	47	73	71	13	03	43	79	17
19	17	53	31	77	29	07	19	97	53
31	37	59	13	79	23	13	59	99	13

NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI
18509	83	18791	19	19067	23	19361	19	19741	19
11	107	18811	13	91	17	63	17	57	23
27	97	17	31	93	61	67	107	69	53
33	43	27	67	97	13	99	19	71	17
47	17	29	19	99	71	19409	13	81	131
51	13	33	37	19109	97	51	53	83	73
59	67	41	83	11	29	87	13	87	47
63	19	47	47	23	13	93	101	99	13
69	31	53	17	27	31	99	17	19807	29
77	13	57	109	33	19	19511	109	23	43
81	17	63	13	47	41	13	13	29	79
89	29	71	113	53	107	17	29	37	83
18607	23	77	43	69	29	19	131	47	89
11	37	81	79	71	19	29	59	49	23
19	43	83	23	77	127	49	113	71	31
29	13	89	13	89	31	61	31	79	103
31	31	18901	41	93	17	67	17	83	59
43	103	23	127	99	73	73	23	97	101
47	29	29	23	19223	47	89	19	19903	13
49	17	37	29	41	71	19601	17	07	17
53	23	41	13	47	19	19	23	09	43
59	47	43	19	53	13	27	19	31	19
73	71	61	67	77	37	31	67	33	31
77	19	67	13	79	13	37	73	39	127
18703	59	71	61	91	101	39	41	51	71
07	13	83	41	97	23	43	13	67	41
09	53	89	17	19303	97	51	43	69	19
21	97	19003	31	07	43	67	71	81	13
27	61	07	83	21	139	69	13	20003	83
37	41	21	23	31	13	73	103	17	37
51	17	27	53	37	61	93	47	33	13
61	73	39	79	39	83	19703	17	39	29
63	29	43	137	43	23	11	23	57	31
69	137	49	43	51	37	21	13	59	13
79	89	57	17	57	13	29	109	77	17

NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI
20081	43	20423	13	20723	17	21053	37	21367	23
87	53	29	31	29	19	71	19	89	73
93	71	37	107	37	89	73	13	21403	17
99	101	53	113	61	13	79	107	09	79
20131	41	59	41	67	19	83	29	21	31
37	13	67	97	77	79	97	17	31	29
59	19	73	59	91	17	21103	47	37	13
71	23	91	31	20803	71	13	43	43	41
79	17	97	103	13	13	27	37	49	89
89	13	20501	13	19	109	37	23	51	19
91	61	13	73	21	47	51	13	57	43
97	19	19	17	27	59	67	61	63	13
20203	89	27	13	31	37	73	31	73	109
13	17	39	19	33	83	81	59	79	47
21	73	57	61	37	67	99	17	21509	137
27	113	61	29	43	19	21209	127	33	61
39	37	67	131	51	29	23	19	41	13
43	31	69	67	61	23	29	13	47	29
57	47	79	13	63	31	33	17	51	23
63	23	91	59	69	41	39	67	83	113
67	13	97	43	91	13	51	79	21607	17
81	17	20609	37	93	17	53	53	19	13
91	103	17	53	20917	13	57	29	29	43
99	53	21	17	27	17	71	89	31	97
20303	79	23	41	41	43	81	13	41	17
09	23	33	47	53	23	89	61	43	23
11	19	51	107	57	19	93	107	53	59
29	29	53	19	69	13	99	19	67	47
51	47	59	73	71	67	21311	101	71	13
71	13	77	23	87	31	31	83	77	53
81	89	83	13	89	139	37	19	89	23
87	19	87	137	21029	17	49	37	91	109
20401	23	89	17	37	109	53	131	97	13
13	137	20701	127	41	53	59	13	21709	17
17	17	11	139	47	13	61	41	19	37

NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI
21731	31	22069	29	22399	13	22711	13	23069	17
33	103	81	71	22403	43	23	31	77	47
43	17	87	13	11	73	33	127	83	41
61	47	97	19	17	29	47	23	23101	13
79	29	22103	23	23	17	53	61	13	29
81	23	17	17	27	41	63	13	19	61
93	19	39	13	39	19	89	13	23	19
97	71	51	17	57	17	93	23	29	101
21809	113	63	37	59	37	22801	151	37	17
11	17	77	67	71	23	19	19	41	73
23	139	81	41	87	113	23	29	47	79
27	13	99	79	89	43	29	37	53	13
29	83	22201	149	93	83	31	17	61	19
53	13	07	53	99	149	37	41	71	17
69	19	13	97	22507	71	43	53	79	13
77	131	17	13	13	47	49	73	83	97
83	79	19	17	23	101	67	13	23207	23
87	43	23	71	29	13	73	89	13	139
99	61	37	37	37	31	79	137	31	13
21907	19	41	23	53	19	89	47	37	19
13	17	43	13	59	17	22903	37	39	17
19	23	49	19	77	107	09	31	49	67
41	37	61	113	79	67	19	13	57	13
47	17	89	31	91	19	27	101	63	43
49	47	22301	29	97	59	31	23	67	53
53	29	13	53	22601	97	33	17	73	17
71	127	21	13	07	13	49	53	81	31
79	31	27	83	09	23	51	59	99	23
83	13	31	137	33	13	69	103	23323	83
22007	59	33	23	57	139	87	127	29	41
09	13	39	89	61	17	91	83	41	17
19	97	57	79	63	131	97	13	47	37
21	19	61	59	67	19	99	109	51	19
49	17	73	13	81	37	23033	31	63	61
61	13	87	61	22703	73	47	19	77	97

NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI
23381	103	23701	137	24047	139	24361	17	24643	19
83	67	07	151	53	67	77	19	49	157
89	19	11	131	67	41	83	37	53	89
93	149	13	23	89	13	89	29	67	17
23407	89	17	37	24119	89	97	31	79	23
11	41	29	61	27	23	24401	13	24701	17
13	13	31	19	31	59	03	23	07	31
23	59	59	23	39	101	27	13	13	13
37	23	77	13	49	19	33	53	19	19
49	131	83	17	61	37	49	23	21	59
53	47	91	37	63	73	57	37	27	79
61	29	97	53	73	23	61	61	37	29
67	31	23803	13	87	19	63	17	43	109
77	17	09	29	91	17	67	43	51	53
79	53	39	31	93	13	87	47	57	19
83	23	43	113	24209	43	91	19	69	17
89	83	51	17	17	61	24503	107	79	71
91	13	61	107	21	53	11	127	91	13
23501	71	67	29	53	79	23	137	97	137
03	19	97	23	57	127	29	19	24803	17
19	29	23921	19	59	17	39	53	11	43
21	43	23	47	63	19	53	43	17	13
33	101	27	71	71	13	57	13	23	103
43	13	39	37	87	149	59	41	33	19
79	17	41	89	89	107	69	79	39	59
87	103	51	43	93	17	81	47	53	29
91	31	53	17	24301	19	83	13	63	23
23621	13	59	13	07	109	87	23	69	13
41	47	63	31	13	41	89	67	81	139
47	13	83	29	19	83	99	17	83	149
51	67	87	17	23	13	24601	73	87	41
57	41	99	103	31	29	13	151	24901	37
59	59	24011	13	41	101	17	103	11	29
93	19	37	13	47	97	37	71	29	97
99	13	41	29	49	13	41	41	31	107

NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI
24947	13	25271	37	25559	61	25897	19	26231	17
49	61	73	127	67	37	25901	59	33	37
61	109	79	17	73	107	09	13	39	19
73	13	83	131	91	157	37	37	69	109
91	67	97	41	25607	29	57	101	73	13
25001	23	25313	17	31	19	61	13	81	41
07	17	27	19	37	31	67	23	87	97
09	89	31	73	49	13	73	19	91	61
19	127	37	13	51	113	79	83	26303	29
21	131	51	101	61	67	87	13	11	83
27	29	63	13	81	61	26009	31	29	113
43	79	69	23	87	17	11	19	33	17
49	37	79	41	91	23	23	53	51	13
51	13	81	17	99	31	27	17	53	19
61	19	87	53	25709	47	39	13	59	43
63	71	93	67	21	17	51	109	63	41
79	31	97	109	23	29	57	71	77	13
93	23	25427	47	27	13	63	67	81	23
99	19	29	59	57	43	69	131	26401	17
25103	13	33	29	69	73	71	29	13	61
29	13	41	13	77	149	77	89	19	29
33	41	51	31	83	19	87	19	29	13
39	23	77	73	87	107	93	97	41	137
41	31	81	83	89	17	26101	43	43	31
59	139	83	17	25807	131	23	151	47	53
77	17	89	71	11	53	29	17	61	47
81	13	93	13	13	83	37	59	71	103
87	89	99	43	29	23	43	13	73	23
99	113	25507	23	31	13	49	79	83	71
25211	17	11	97	43	43	67	137	91	59
13	19	13	31	53	103	79	47	26503	17
17	151	17	17	59	19	97	17	07	13
31	23	19	13	71	41	26207	73	19	23
41	43	47	59	77	113	19	157	27	41
59	13	49	29	91	17	21	13	31	43

NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI
26533	13	26869	97	27187	31	27473	83	27787	37
49	139	97	13	93	71	91	37	27821	43
63	101	99	37	99	59	93	19	29	17
67	31	26909	71	27217	17	97	31	33	13
69	163	11	17	21	163	99	107	57	89
81	19	23	13	27	19	27521	13	59	13
99	67	33	23	29	73	23	17	69	29
26603	37	41	29	33	113	47	13	71	47
11	13	63	59	57	97	53	59	77	61
17	43	69	149	63	137	57	17	87	79
23	79	77	53	87	13	63	43	89	167
29	31	89	137	89	29	69	19	99	23
39	17	27001	13	27301	23	71	79	27911	13
51	29	07	113	11	31	89	47	13	103
57	19	19	41	17	59	93	41	31	17
59	53	23	61	19	17	27607	19	49	19
71	149	29	151	23	89	13	53	59	73
89	13	37	19	31	151	19	71	71	83
26707	17	47	17	41	19	23	23	77	101
43	47	53	13	43	37	37	29	89	13
49	23	79	13	47	23	41	131	91	23
53	31	89	103	53	17	49	43	28003	41
67	13	27101	41	59	109	59	17	09	37
71	19	13	19	71	101	61	139	13	109
73	41	19	47	73	31	67	73	33	17
79	61	21	37	83	139	77	13	37	23
91	73	31	13	89	61	79	89	43	29
97	127	33	43	27403	67	83	19	67	13
26809	17	49	17	13	79	27703	13	73	67
19	13	51	19	21	17	07	103	79	43
27	139	57	13	39	23	19	53	93	13
37	47	61	157	43	13	21	19	28103	157
43	17	63	23	51	97	57	41	17	31
57	107	69	101	63	29	61	17	21	61
67	67	73	29	69	13	81	13	27	23

NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI
28139	19	28417	157	28783	107	29087	17	29419	13
41	107	21	97	99	31	89	19	31	19
53	47	23	43	28801	83	93	47	41	59
57	37	51	23	11	47	29107	13	59	89
59	29	53	37	23	19	11	43	61	17
69	17	59	149	29	127	19	37	67	79
77	19	71	71	41	151	43	151	71	13
87	71	81	19	49	17	49	103	79	41
99	163	87	61	73	13	59	13	89	37
28207	67	89	31	77	67	71	31	97	13
13	89	28507	29	83	17	77	163	29503	163
23	13	19	19	91	167	89	17	07	19
41	31	29	47	28907	137	29203	19	09	23
43	61	31	103	13	29	13	131	21	53
47	47	43	17	37	19	19	61	39	109
49	13	61	13	39	43	33	23	43	31
53	19	77	17	43	103	37	13	49	13
61	59	83	101	51	13	57	17	51	29
67	23	28601	37	57	23	61	29	63	17
71	17	13	13	67	83	63	13	91	127
91	19	39	13	69	59	73	73	93	101
28313	23	67	109	81	73	79	19	97	17
21	127	73	53	91	53	91	17	29609	29
27	13	81	23	93	79	99	83	21	19
31	41	91	13	97	107	29317	19	27	13
33	29	28709	19	99	47	21	109	39	107
37	43	17	13	29003	13	29	139	47	23
39	17	27	23	11	67	41	13	51	149
61	79	33	59	39	71	53	149	53	13
63	113	39	29	41	113	57	31	57	47
67	19	41	41	47	31	69	43	77	59
73	17	47	17	53	17	71	23	81	67
79	13	57	149	69	41	77	29	93	23
81	101	69	13	81	13	29413	67	99	17
97	73	81	17	83	127	17	23	29707	61

NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI
29713	43	29993	89	30311	17	30601	71	30917	43
19	113	99	131	29	13	07	127	23	17
31	13	30001	19	37	23	17	17	29	157
37	131	07	37	43	19	19	67	53	13
47	151	17	13	53	127	23	113	59	83
49	71	31	59	61	97	29	109	67	173
67	17	43	13	77	37	41	13	73	47
73	19	49	131	79	17	47	19	79	13
79	97	53	41	83	23	59	23	91	17
83	13	61	23	97	113	73	37	97	139
91	31	67	107	30407	13	83	61	31001	29
97	83	73	17	09	47	91	47	07	101
29801	17	77	19	13	17	30719	13	21	67
07	41	83	67	19	19	21	31	27	19
09	13	30101	31	21	29	31	79	37	41
31	23	27	47	33	13	33	73	43	37
39	53	31	29	39	61	39	59	49	61
49	19	43	43	51	37	43	71	57	13
57	73	57	53	61	83	49	97	61	89
61	13	67	97	63	41	61	19	67	47
91	71	79	103	73	31	69	29	93	17
93	167	93	109	79	29	87	17	99	137
99	29	99	13	87	43	91	41	31103	19
29903	17	30209	17	30511	13	97	13	09	13
23	23	21	47	21	23	99	19	11	53
29	173	27	167	23	131	30823	13	17	29
33	37	29	19	31	13	27	29	27	17
41	79	51	13	33	19	47	109	33	163
51	61	57	79	51	137	57	59	69	71
57	29	63	53	63	13	83	89	87	13
63	19	77	13	71	19	87	67	31201	41
69	23	81	107	81	53	89	17	11	23
71	17	87	31	87	73	30901	13	17	19
77	31	99	41	89	13	07	31	43	157
87	157	30301	157	99	37	13	19	61	43

NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI
31279	31	31553	139	31841	17	32149	13	32509	19
89	67	61	37	53	53	61	29	13	13
91	13	71	131	61	151	67	19	19	31
31301	113	79	23	77	127	71	53	21	17
03	23	89	31	79	71	77	23	39	13
09	31	97	19	97	167	32201	13	51	43
13	173	31609	73	31901	19	09	31	67	29
31	17	13	101	03	61	27	13	81	31
43	13	21	103	09	17	31	167	91	13
49	23	31	47	19	59	39	103	97	37
51	107	37	17	21	137	43	19	32617	13
63	79	39	29	31	37	67	41	23	17
69	13	51	31	37	109	69	23	29	67
73	137	73	19	39	19	73	59	39	127
99	17	79	79	43	17	79	13	51	103
31403	31	81	13	49	43	81	19	57	17
11	101	93	41	51	89	87	83	63	89
17	89	97	29	61	31	93	43	71	37
21	13	31709	37	67	13	32311	79	77	41
29	53	11	19	79	113	17	17	89	97
33	17	33	13	87	29	39	73	99	19
39	149	39	17	93	13	57	13	32701	53
41	23	47	53	32017	101	83	13	23	43
47	13	53	113	23	31	87	139	29	23
53	71	63	23	33	103	93	29	31	71
57	83	77	43	41	179	99	179	37	19
59	163	81	61	47	73	32407	23	41	29
63	73	83	37	71	13	19	17	43	137
83	19	89	83	93	67	37	163	59	17
87	23	31807	17	32101	47	47	71	61	181
99	13	11	13	07	97	49	37	73	13
31501	17	13	29	11	163	53	17	77	73
19	49	19	47	13	17	71	19	32807	53
23	29	31	139	29	19	77	47	19	37
29	41	37	13	47	17	89	53	21	23

NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI
32827	17	33163	13	33449	13	33823	149	34093	103
49	107	67	17	63	109	33	23	99	13
61	17	69	41	91	107	39	13	34103	67
63	59	93	19	97	19	41	43	09	23
67	23	97	89	99	139	53	97	17	109
73	71	33217	59	33511	23	77	19	21	149
81	131	21	139	27	13	81	17	51	13
91	31	27	149	41	17	83	31	63	127
97	67	33	167	53	13	99	109	69	47
99	167	39	43	57	23	33907	41	87	17
32903	13	41	13	59	37	17	13	89	179
27	19	51	41	71	59	19	107	93	31
29	13	59	79	33611	19	47	83	34201	23
47	47	63	29	31	13	49	17	07	79
51	83	69	17	43	17	53	19	19	19
53	31	77	107	53	73	59	29	29	13
59	23	81	23	59	97	73	53	41	97
81	13	83	83	61	41	77	61	47	23
33001	61	93	13	67	131	83	17	49	29
07	13	33307	19	73	151	89	41	71	43
17	137	23	47	83	13	91	19	77	151
31	17	37	17	89	59	34003	37	89	17
41	19	61	73	97	31	07	31	91	53
43	137	67	61	33701	67	09	71	34333	13
59	13	71	13	07	37	21	13	39	23
67	43	73	23	09	13	37	101	43	61
79	19	79	29	27	29	43	59	57	17
97	23	89	173	31	89	49	79	73	37
33101	79	33401	127	43	41	51	17	79	31
09	113	19	23	63	19	63	23	87	137
27	157	21	19	79	17	73	13	93	163
33	17	31	101	87	13	79	53	99	41
37	13	33	67	93	47	81	173	34409	19
39	31	37	29	99	73	87	89	11	13
57	71	43	53	33821	31	91	73	17	127

NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI
34423	29	34753	23	35039	37	35359	19	35663	19
27	173	77	83	41	67	69	113	69	53
51	47	87	43	47	101	77	17	81	31
53	131	89	19	71	17	83	41	83	17
59	17	99	17	87	13	89	43	87	127
77	23	34801	13	93	19	35411	17	89	89
81	29	13	31	35113	13	17	107	99	29
93	17	17	37	31	19	29	71	35701	19
34523	19	23	97	37	41	43	23	11	13
41	13	29	29	43	113	59	59	13	71
47	179	31	61	73	17	67	29	19	23
53	109	61	71	77	29	71	79	23	139
61	17	73	43	79	127	73	19	37	13
67	13	79	13	83	151	77	13	41	103
71	181	89	139	91	13	79	17	43	31
77	71	91	23	97	61	89	23	67	47
79	151	34901	17	35207	17	35501	131	73	83
97	29	07	67	09	137	13	17	79	37
34609	53	21	47	13	23	49	19	89	13
19	13	27	53	19	41	51	73	35807	61
21	89	31	13	37	167	57	31	13	59
27	31	33	181	39	131	61	43	21	113
33	59	43	83	43	13	79	47	43	73
37	19	57	13	49	101	87	19	57	23
63	17	67	73	61	37	99	97	67	13
69	37	73	41	63	179	35611	149	73	29
81	79	87	59	69	13	21	179	81	53
91	113	97	79	93	29	27	23	87	17
97	13	99	31	97	47	33	13	91	19
34709	61	35003	17	35303	43	39	157	35909	149
11	103	09	13	09	17	41	29	21	17
17	149	11	157	33	89	47	43	27	37
23	13	17	19	41	59	53	101	29	19
33	47	29	23	47	13	57	181	39	83
51	19	33	53	51	23	59	13	41	127

NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI
35947	103	36259	101	36577	79	36937	43	37231	31
53	157	71	19	81	157	41	17	37	23
57	41	83	13	93	23	59	13	41	167
71	13	87	131	36601	17	61	23	49	193
89	17	36301	31	11	31	77	103	59	19
36019	181	17	23	13	19	83	31	67	83
23	13	29	17	23	53	89	47	71	13
31	137	31	47	47	13	91	71	83	23
41	23	47	19	49	67	37001	163	91	89
49	13	49	163	61	61	07	23	97	13
53	31	59	103	67	37	27	61	37319	67
59	107	61	13	79	43	31	19	27	163
77	43	67	41	89	19	33	29	33	37
79	109	71	37	36703	17	43	17	43	107
89	151	91	151	19	73	63	13	49	13
36101	13	97	17	27	19	67	101	51	41
03	79	36401	89	31	23	69	19	81	29
19	19	03	59	33	109	73	131	91	139
21	41	09	23	37	17	91	29	93	61
23	23	13	13	63	97	99	23	99	149
39	71	19	79	69	83	37109	43	37403	113
43	47	27	73	97	31	11	17	17	17
49	37	31	17	36803	13	27	137	21	23
63	29	37	83	11	131	29	107	27	13
67	59	39	13	23	23	33	71	39	29
73	61	61	19	29	13	41	13	51	17
81	97	81	191	51	43	51	97	53	13
93	17	99	17	53	137	53	53	59	47
99	53	36503	173	59	29	57	73	69	89
36203	41	11	29	63	191	83	19	81	37
21	29	17	13	81	13	87	41	87	19
27	17	21	59	89	37	93	13	37519	17
33	19	39	61	93	79	37207	29	23	157
47	67	57	139	36907	13	11	127	31	13
57	13	69	13	17	19	29	59	53	17

NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI
37559	23	37843	13	38123	67	38419	103	38741	19
77	53	59	17	31	17	29	83	43	17
37601	19	67	19	41	43	41	13	61	83
03	31	83	43	47	37	43	37	71	137
13	29	37901	151	61	31	71	17	77	17
21	17	03	29	73	59	73	79	79	13
27	191	09	167	79	73	77	109	89	79
37	61	13	31	91	181	83	29	38807	151
51	23	21	13	38207	13	91	61	09	197
61	13	27	17	09	19	97	137	13	37
69	139	31	83	21	37	38503	139	27	41
73	101	37	59	33	13	09	97	31	13
79	41	43	19	43	167	13	19	37	71
87	13	49	137	49	23	19	13	49	53
37703	37	69	43	51	29	27	59	69	47
11	43	73	13	57	67	31	53	79	17
21	67	79	163	63	83	37	89	81	59
27	31	81	19	67	17	39	17	87	37
29	29	99	13	79	101	51	19	93	19
33	97	38009	191	93	149	73	17	97	97
39	13	21	193	38309	29	79	173	38909	13
53	19	23	47	23	19	81	41	11	167
57	17	29	17	41	23	87	47	39	23
59	61	33	73	47	31	97	13	47	17
69	179	41	109	59	89	38617	23	57	163
71	107	51	13	63	13	23	13	63	47
77	37	57	19	69	17	27	19	81	17
87	29	63	17	83	131	41	17	87	13
89	23	77	13	87	23	57	29	89	127
37801	103	81	113	89	13	59	67	99	59
17	13	89	41	99	19	63	23	39001	43
19	59	99	31	38407	193	81	47	07	19
23	109	38107	53	11	71	83	101	13	13
37	157	11	23	13	107	38701	13	29	31
41	79	17	47	17	41	19	31	31	23

NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI
39037	103	39361	13	39677	17	39997	23	40297	59
49	17	79	53	73	97	40001	13	40301	191
59	139	39401	31	89	13	03	109	03	41
71	89	07	157	91	19	21	31	07	17
73	41	21	79	39701	29	27	13	09	173
77	23	27	89	07	59	43	23	19	23
91	13	33	47	13	151	49	29	21	61
39101	61	37	113	31	67	57	41	31	31
21	19	49	103	37	79	67	103	33	53
31	109	63	19	51	127	69	17	39	13
43	13	67	61	57	83	79	13	49	157
67	53	69	29	63	17	81	149	63	181
69	13	81	13	73	31	91	47	67	37
73	43	91	17	93	13	97	101	73	47
87	149	93	73	97	17	40109	19	79	149
97	19	97	127	39803	53	21	53	91	13
39203	197	39517	43	11	41	33	67	93	31
11	113	27	29	17	29	41	137	99	71
23	61	33	13	33	61	47	19	40409	17
47	13	39	19	59	23	57	13	17	13
53	17	47	71	71	13	71	17	21	83
57	37	53	37	81	19	81	23	41	37
69	107	59	13	89	113	99	61	51	19
71	173	77	19	99	17	40207	31	57	23
83	163	83	23	39911	107	11	79	63	43
87	17	87	31	13	167	17	131	77	17
89	101	93	17	17	179	19	37	89	19
99	13	39601	199	23	13	23	19	40501	101
39307	23	17	173	31	73	47	167	11	17
11	19	29	23	43	59	59	127	17	31
29	67	37	13	47	43	61	13	41	71
31	37	43	29	59	31	67	67	47	13
37	139	47	41	61	89	73	17	49	23
49	19	49	31	67	17	79	47	53	107
53	23	53	19	73	71	91	43	61	47

NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI
40567	113	40871	23	41171	13	41497	17	41819	19
71	29	77	41	91	17	41501	47	21	13
73	13	89	31	97	13	09	13	27	151
89	37	91	103	41207	89	27	131	31	59
40603	19	40907	19	19	47	33	41	37	17
13	17	13	163	49	13	37	73	57	19
19	151	19	17	67	29	51	37	61	41
31	41	21	151	73	149	57	29	69	149
33	179	37	13	87	19	61	13	73	13
43	97	51	31	91	157	63	89	91	163
51	13	63	13	97	61	67	197	41917	167
57	109	67	71	41303	103	81	43	29	23
61	73	69	53	09	101	99	17	33	19
69	67	79	43	11	109	41623	107	39	17
73	89	81	107	17	79	33	17	63	29
79	19	87	17	23	31	39	13	71	19
81	17	91	179	29	37	53	23	77	13
87	23	41003	131	39	67	63	61	89	199
40703	13	09	23	47	173	77	71	42001	97
17	19	21	17	53	13	83	73	11	43
21	43	29	89	59	59	89	47	29	13
23	193	33	37	69	41	98	173	37	127
27	139	53	61	83	29	41707	179	41	17
29	13	59	19	41401	19	11	53	47	19
41	131	71	67	07	47	17	13	59	137
53	83	87	181	17	83	31	29	67	23
57	53	89	17	23	23	43	18	79	29
69	59	93	13	29	17	47	109	42103	71
81	13	99	73	31	13	49	83	07	13
83	17	41101	23	41	29	53	43	09	17
93	19	19	13	49	181	73	37	13	23
40807	13	23	17	71	113	79	41	21	73
11	37	37	31	73	67	91	23	27	103
37	97	47	23	77	19	41803	17	37	29
61	29	59	79	83	13	07	97	43	17

NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI
42149	113	42523	13	42851	73	43129	17	43381	13
51	61	27	23	57	17	39	179	87	43
67	149	29	71	69	163	47	13	43409	83
73	181	41	19	71	43	57	103	23	173
91	31	47	157	77	53	63	17	29	137
99	19	51	17	81	137	71	23	39	13
42211	13	63	31	83	19	81	29	47	23
33	157	83	97	87	13	87	19	53	19
41	53	87	37	93	59	93	47	59	13
47	83	93	191	42907	107	99	13	69	17
53	29	99	41	13	13	43213	79	71	29
63	13	42601	13	19	167	17	23	89	157
69	43	07	137	41	23	29	139	93	23
71	41	13	43	47	67	31	17	43501	41
77	67	17	19	49	29	43	83	07	139
89	13	19	17	71	97	47	59	11	13
42311	29	29	47	83	53	49	61	13	53
13	17	31	89	91	13	59	181	23	71
19	101	53	13	97	19	73	109	29	19
41	13	59	29	43007	29	77	13	31	101
47	17	61	37	09	41	79	113	37	13
53	41	71	71	27	17	89	73	53	97
67	13	73	139	31	37	97	29	59	43
77	31	42731	13	38	23	43301	19	67	19
89	19	33	131	39	193	03	13	83	41
42401	109	39	79	61	17	27	37	43601	59
19	13	61	61	69	13	33	17	19	53
21	59	69	19	73	19	39	19	21	181
31	131	81	179	79	23	43	89	39	17
39	31	99	127	81	67	49	63	43	19
79	107	42803	23	91	41	57	191	57	149
81	23	09	13	97	71	61	131	63	47
42503	19	11	31	43111	19	63	103	67	13
17	17	17	47	21	13	67	17	79	31
21	101	27	113	23	29	69	31	93	13

NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI
43697	37	43957	113	44323	127	44599	103	44921	29
99	89	79	13	27	19	44603	13	23	167
43709	109	98	29	29	97	09	31	29	179
23	23	99	23	33	43	29	13	41	13
27	73	44003	79	39	101	59	17	51	79
33	101	39	47	47	61	63	59	69	193
39	191	47	17	53	17	69	19	77	41
41	17	57	13	69	13	77	43	81	31
51	67	63	139	77	199	89	23	93	13
63	107	69	127	93	103	44707	13	99	17
43807	71	81	17	99	29	13	61	45011	19
11	193	83	13	44411	89	17	97	19	13
17	43	44113	31	13	23	19	197	29	37
19	29	17	157	19	43	31	41	37	29
23	13	37	19	23	31	43	101	41	73
29	41	41	37	31	157	47	29	43	31
31	53	47	131	37	37	49	73	47	107
37	59	53	67	41	19	61	17	49	19
43	17	61	13	47	13	67	89	71	13
47	163	67	29	59	23	83	19	79	61
49	13	73	163	61	173	91	47	91	67
59	61	83	17	67	53	44801	71	97	13
61	23	97	193	77	79	13	41	45103	23
71	19	44213	13	79	19	27	23	07	43
73	73	27	47	89	17	31	127	09	79
77	17	37	31	44503	191	33	107	13	197
43903	43	39	13	09	47	37	13	49	13
07	23	43	151	21	211	57	31	51	163
09	19	51	17	51	13	61	113	63	19
19	37	87	67	57	17	73	23	67	31
21	167	91	13	67	41	81	37	69	17
27	13	99	31	73	29	97	17	73	299
31	197	44309	59	81	109	99	59	87	73
37	53	11	73	91	17	44903	83	93	43
49	71	21	23	93	19	11	97	45203	17

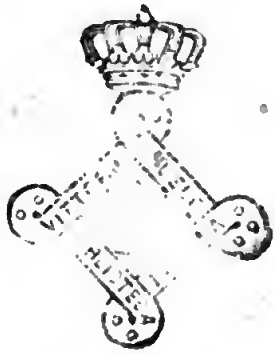
NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI
45209	53	45499	173	45797	41	46087	17	46373	79
11	29	45509	17	99	13	97	31	79	19
17	103	11	71	45803	163	46111	13	91	23
23	31	17	23	09	19	17	107	93	17
29	31	27	53	11	61	21	17	97	13
39	19	39	13	39	23	27	193	46421	61
51	37	47	37	47	19	29	163	23	13
53	13	59	29	51	13	39	29	27	17
57	167	71	199	77	13	57	101	29	29
71	17	81	19	83	17	59	31	33	59
77	19	83	79	89	109	63	13	63	97
99	97	93	127	45901	197	69	137	69	31
45301	89	45601	31	07	29	77	61	81	53
13	113	07	59	11	31	46201	47	83	23
23	61	11	17	17	17	13	37	93	19
47	137	23	43	19	47	17	113	46513	193
49	101	29	103	23	19	23	17	17	181
59	67	37	47	29	13	31	83	31	19
71	59	43	13	31	23	41	13	37	173
73	17	49	191	37	71	43	131	47	89
79	23	53	71	61	19	47	103	53	13
83	13	71	109	67	43	53	23	61	101
91	19	79	17	73	31	59	167	77	47
45401	83	45701	23	77	23	67	13	79	13
07	17	09	43	46001	157	83	31	83	37
21	53	13	17	03	179	89	41	97	17
31	181	19	131	07	13	97	67	46603	29
43	29	21	13	09	139	46303	19	09	127
49	47	33	19	19	17	13	29	21	23
57	131	39	53	31	191	31	107	31	13
61	13	43	149	33	13	39	149	37	149
67	19	61	67	37	19	57	151	57	13
69	41	69	37	43	41	63	71	61	29
73	37	81	17	63	73	67	199	67	23
87	13	91	29	69	23	69	89	93	53

NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI
46699	17	46979	109	47249	37	47573	113	47897	211
46709	13	87	19	61	167	87	23	99	19
21	19	99	43	63	151	47603	181	47909	23
29	83	47009	29	73	41	11	47	21	173
33	17	11	53	81	13	17	17	23	17
41	43	21	13	91	19	27	97	41	191
59	19	23	59	47321	79	33	19	53	79
63	101	27	31	23	37	47	29	59	199
77	29	29	131	29	19	51	17	83	13
87	13	39	17	47	113	69	73	87	47
89	71	53	211	57	23	71	13	89	37
93	73	63	19	59	13	83	41	48001	23
99	53	71	103	71	127	87	43	07	61
46801	17	77	179	93	83	89	103	11	41
13	13	81	23	47401	107	93	37	19	31
41	31	83	197	13	17	47723	13	31	43
43	139	99	13	23	47	31	59	43	107
47	79	47101	19	29	43	49	13	47	23
59	47	07	17	37	13	53	17	53	29
73	19	41	17	47	17	59	163	61	13
83	173	53	61	49	23	67	37	67	71
91	13	67	101	61	31	71	23	71	53
97	23	71	43	71	37	83	71	77	131
46903	17	77	13	73	29	47801	13	89	19
09	61	83	29	77	197	13	137	48101	103
13	43	91	41	79	79	21	17	07	73
27	167	97	109	83	103	27	13	13	13
31	71	47203	13	89	13	33	31	27	17
39	73	09	17	47503	67	49	59	33	127
43	13	13	31	19	19	51	109	37	37
51	29	19	23	39	137	63	23	43	31
61	151	27	83	49	17	67	151	49	89
67	67	31	73	57	19	79	13	51	179
69	13	33	149	61	199	91	83	61	17
73	107	39	97	67	13	93	47	73	67

NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI
48199	57	48493	71	48803	37	49127	13	44497	197
48203	19	48509	179	27	157	29	73	53	17
11	37	11	139	33	47	41	157	57	19
17	13	29	13	41	13	51	23	71	61
27	29	47	43	63	131	53	13	87	17
29	17	51	47	77	37	63	211	93	43
33	139	53	23	87	19	83	137	49501	59
41	19	57	59	93	13	87	101	07	31
53	73	69	17	99	107	49213	29	13	67
63	17	77	31	48901	79	19	83	17	13
69	13	81	13	11	59	29	19	19	23
77	23	83	19	13	41	37	53	43	13
83	53	99	23	19	13	41	41	61	29
87	109	48607	13	29	113	43	23	71	19
89	43	13	173	31	167	49	17	73	89
48317	19	17	61	41	199	67	19	79	43
19	211	37	17	43	17	71	29	83	179
29	31	41	27	49	31	83	13	89	17
31	17	59	13	59	173	89	23	91	101
43	29	67	41	67	23	49303	47	49601	193
47	13	83	89	71	13	09	13	07	113
59	37	89	181	77	17	19	149	19	29
61	137	91	23	97	13	21	31	31	31
73	13	48701	31	49001	19	27	107	49	131
79	101	03	113	13	23	37	103	57	17
48401	29	07	53	39	19	49	61	61	53
03	97	09	67	51	181	51	17	73	13
21	41	21	83	61	71	61	13	91	17
27	79	37	13	67	139	73	97	99	13
31	19	39	17	73	31	81	19	49703	23
43	193	43	79	79	17	87	13	17	83
51	13	49	29	87	191	97	47	23	19
57	37	73	17	97	29	49403	127	29	223
67	17	91	97	99	37	21	73	33	41
69	19	93	59	49111	67	39	13	51	13

NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI	NUMERI	DIVISORI
49759	17	49813	109	49867	47	49909	29	49967	29
69	157	17	31	73	53	13	19	69	107
71	71	29	13	79	31	33	13	79	23
81	67	37	19	83	83	49	199	81	151
93	17	49	79	97	41	61	47	97	17
99	19	59	73	49901	139	63	17	50003	31

Fine della Tavola dei Numeri primi.



MAG2005391

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google